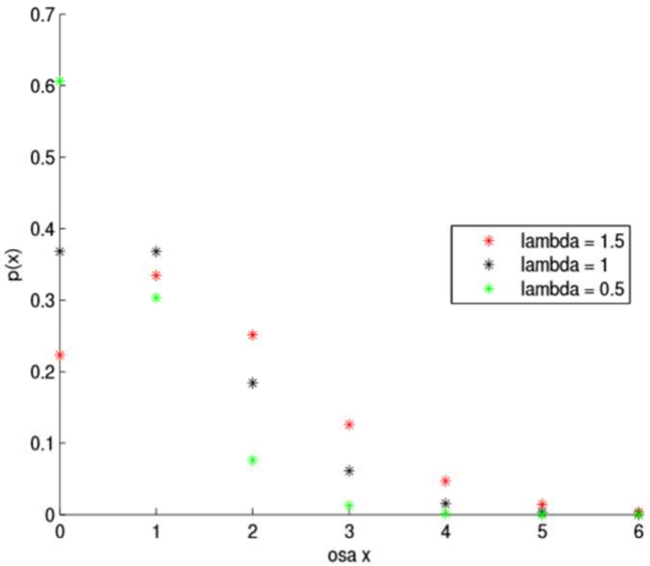
4. Poissonovo rozložení a jeho vlastnosti

4.1. Definice: Diskrétní náhodná veličina X má Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže pravděpodobnostní funkce $\pi(x)$ má tvar:

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

. Zkráceně píšeme $X \sim Po(\lambda)$.

Průběh pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení pro různé hodnoty parametru λ:



4.2. Poznámka: Lze odvodit, že náhodná veličina X~ $Po(\lambda)$ má tyto číselné charakteristiky:

a) střední hodnota $E(X) = \lambda$

b) rozptyl $D(X) = \lambda$

c) šikmost $\alpha_3(X) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

d) špičatost $\alpha_4(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

4.3. Poznámka: Náhodná veličina X~ $Po(\lambda)$ udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu resp. jednotkové oblasti, přičemž tyto události nastávají náhodně, jednotlivě a nezávisle na sobě. Parametr $\lambda > 0$ udává střední hodnotu (i rozptyl) počtu událostí.

Poissonovým rozložením se řídí např.

- počet výzev, které dojdou na TÚ za jednotkový časový interval
- počet mikroorganizmů v jednotkové oblasti zorného pole mikroskopu
- počet požadavků v systému hromadné obsluhy za jednotkový časový interval
- atd.

Upozornění: Pokud X udává počet událostí, které nastanou v časovém intervalu délky t a střední hodnota počtu událostí v jednotkovém časovém intervalu je λ, pak X~ $Po(\lambda t)$.

4.4. Věta: Nechť X ~ $\mathrm{Po}(\lambda)$ a Y ~ $\mathrm{Bi}(n, \vartheta_n)$, přičemž $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n\vartheta_n = \lambda$. Pak pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y konverguje pro n → ∞ k pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

Důkaz:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{y}\vartheta_n^{\,y}(1-\vartheta_n)^{n-y} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{y!(n-y)!}\vartheta_n^{\,y}(1-\vartheta_n)^{n-y} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{y}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} =$$

$$= \frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\dots(n-y+1)}{n^n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} = \frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{y-1}{n}\right)\right]\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y} =$$

$$= \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$$

Upozornění: Binomické rozložení můžeme dobře aproximovat Poissonovým rozložením, když pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu je velmi malá ($\vartheta \le 0{,}1$) a zároveň počet pokusů je dostatečně velký ($n \ge 30$).

4.5. Příklad: Předpokládejme, že při pěstování rostlin hrachu je pravděpodobnost uhynutí rostliny 0,002. Jaká je pravděpodobnost, že při pěstování 1000 rostlin
a) neuhyne žádná rostlina, b) uhynou nejvýše 4 rostliny?

Řešení: Označme Y náhodnou veličinu, která udává počet uhynulých rostlin hrachu.
Z podmínek úlohy plyne, že Y ~ $\mathrm{Bi}(1000;0,002)$.
Přesný výpočet:

a) $P(Y=0)=\binom{1000}{0}0,002^{0}0,998^{1000-0}=\text{binopdf}\,(0,1000,0.002)=0,13506452$

b) $P(Y\le 4)=\sum_{y=0}^{4}\binom{1000}{y}0,002^{y}0,998^{1000-y}=\text{binocdf}\,(4,1000,0.002)=0,94752761$

Aproximace Poissonovým rozložením: podmínky $n\ge 30$ a $\vartheta\le 0,1$ jsou splněny. Přitom $\lambda=n\cdot\vartheta=1000\cdot 0,002=2$.

a) $P(Y=0)\approx\frac{2^{0}}{0!}e^{-2}=\text{poisspdf}\,(0,2)=0,13533528$

b) $P(Y\le 4)\approx\sum_{y=0}^{4}\frac{2^{y}}{y!}e^{-2}=\text{poisscdf}\,(4,2)=0,94734699$

4.6. Věta: Nechť X ~ $Po(\lambda)$. Pak pro modus $\hat{x}$ platí: $\lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda$. Je-li λ přirozené číslo, pak existují dvě modální hodnoty. Není-li λ přirozené číslo, je Poissonovo rozložení unimodální.

Důkaz: Protože modus je nejpravděpodobnější hodnota, musí současně vyhovovat dvěma nerovnostem:

$\pi(\hat{x}) \ge \pi(\hat{x}-1) \wedge \pi(\hat{x}) \ge \pi(\hat{x}+1)$, tj. $\dfrac{\pi(\hat{x}-1)}{\pi(\hat{x})} \le 1 \wedge \dfrac{\pi(\hat{x}+1)}{\pi(\hat{x})} \le 1$.

Dosadíme za pravděpodobnostní funkci a postupně upravujeme:

$$\frac{\dfrac{\lambda^{\hat{x}-1}}{(\hat{x}-1)!}e^{-\lambda}}{\dfrac{\lambda^{\hat{x}}}{\hat{x}!}e^{-\lambda}} \le 1 \wedge \frac{\dfrac{\lambda^{\hat{x}+1}}{(\hat{x}+1)!}e^{-\lambda}}{\dfrac{\lambda^{\hat{x}}}{\hat{x}!}e^{-\lambda}} \le 1$$

$\dfrac{\hat{x}}{\lambda} \le 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\hat{x}+1} \le 1 \Rightarrow \hat{x} \le \lambda \wedge \hat{x} \ge \lambda - 1$, tj. $\lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda$.

4.7. Příklad: K holiči chodí průměrně 6 zákazníků za 1 h. Určete nejpravděpodobnější počet zákazníků u holiče během půl hodiny a určete pravděpodobnost tohoto počtu.

Řešení: Náhodná veličina X udává počet zákazníků u holiče během 1/2 h, X ~ $\mathrm{Po}(3)$. Protože λ je přirozené číslo, existují dvě modální hodnoty, a to 2 a 3. Jejich pravděpodobnosti:

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224$$

$$P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224$$

4.8. Věta: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, 2. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Důkaz:

Podle věty o konvoluci dostáváme:

$$\pi_*(y) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \pi_1(x_1)\pi_2(y - x_1) = \left| x_1 > 0, y - x_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < y \right| = \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{y-x_1}}{(y - x_1)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1=0}^{y} \binom{y}{x_1} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^y}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \text{ pro } y = 0, 1, 2, \ldots, = 0 \text{ jinak}$$

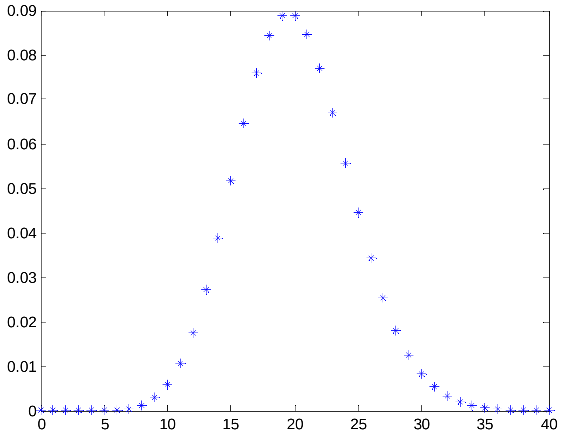
Vidíme, že $Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4.9. Poznámka: Tvrzení věty 4.8. lze zobecnit i na n stochasticky nezávislých veličin $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, …, n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$. Znamená to, že Poissonovo rozložení je uzavřené vzhledem k operaci sčítání.

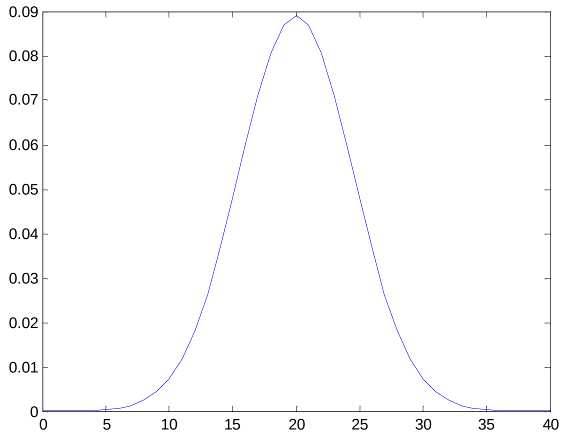
4.10. Věta: Nechť $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, přičemž λ je přirozené číslo větší než 9. Pak rozložení náhodné veličiny X lze aproximovat rozložením N(λ, λ).

Důkaz: Podle poznámky 4.9. je $X = \sum_{i=1}^{\lambda} X_i$, přičemž stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_\lambda$ se řídí rozložením Po(1), $E(X_i) = 1$, $D(X_i) = 1$, $i = 1, \ldots, \lambda$. Podle CLV dostáváme, že standardizovaná veličina $U = \dfrac{\sum_{i=1}^{\lambda} X_i - \sum_{i=1}^{\lambda} E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\lambda} D(X_i)}} = \dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$, tedy $X = \sqrt{\lambda}U + \lambda \approx N(\lambda, \lambda)$.

Graf pravděpodobnostní funkce Po(20)



Graf hustoty N(20,20)



4.11. Věta: Nechť X ~ $\mathrm{Po}(\lambda)$, přičemž λ je přirozené číslo větší než 9. Pak pro nezáporná celá čísla a, b, a < b platí:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right),$$ kde Φ je distribuční funkce rozložení N(0, 1).

Důkaz:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \le U \le \frac{b-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = P\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le U \le \frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

4.12. Poznámka: Aproximace Poissonova rozložení normálním rozložením se zlepší, když použijeme tzv. opravu na nespojitost:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda+\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

4.13. Příklad: Nechť $X \sim \mathrm{Po}(12)$. Pomocí aproximace normálním rozložením stanovte $P(8 \le X \le 20)$.

Řešení:

$$P(8 \le X \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20-12+\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{8-12-\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(2{,}45) - \Phi(-1{,}3) =$$

$$= \Phi(2{,}45) - 1 + \Phi(1{,}3) = 0{,}99286 - 1 + 0{,}9034 = 0{,}89606$$

Pro porovnání provedeme přesný výpočet:

$$P(8 \le X \le 20) = \sum_{x=8}^{20} \frac{12^x}{x!} e^{-12} = \mathrm{poisscdf}\,(20{,}12) - \mathrm{poisscdf}\,(7{,}12) = 0{,}8989$$

4.14. Věta: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Po(λ), přičemž $n\lambda > 9$. Označme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ výběrový průměr. Pak meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ jsou:

$$D = M - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}, \quad H = M + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Důkaz: Podle centrální limitní věty $M \approx N(E(M), D(M))$, kde $E(M) = \lambda$, $D(M) = \frac{\lambda}{n}$.

Standardizací M dostaneme $U = \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \approx N(0,1)$. Konvergence k N(0,1) se neporuší, když λ ve jmenovateli nahradíme M, tedy $U = \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{M}{n}}} \approx N(0,1)$. Pak platí:

$$\forall \lambda > 0 : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{M}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2} < \lambda < M + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

4.15. Poznámka: Meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ se zpřesní, když použijeme tzv. opravu na nespojitost:

$$D = M - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\,,\ \ H = M + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\,.$$

4.16. Příklad: Předpokládáme, že při výrobě určité tkaniny je počet kazů připadajících na 100 m této tkaniny náhodná veličina s rozložením Po(λ). Při kontrole 25 balíků, z nichž každý obsahoval 100 m této tkaniny, bylo zjištěno, že celkový počet kazů je 30. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.

Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 - \frac{1}{50} - \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 0{,}75$$

$$h = m + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 + \frac{1}{50} + \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 1{,}65$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,75 do 1,65.

4.17. Věta: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Po(λ). Označme $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ realizaci výběrového průměru. Pak meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ jsou: $d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm)$, $h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2)$.

Důkaz: Viz HÁTLE JAROSLAV - LIKEŠ JIŘÍ. Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1974. 463 s.

Upozornění: Podle vztahů uvedených ve větě 4.17. počítá MATLAB pomocí funkce poissfit meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ.

4.18. Příklad: Pro údaje z příkladu 4.16. najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.

Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,025}(60) = \frac{1}{50}40{,}48 = 0{,}81$$

$$h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,975}(62) = \frac{1}{50}85{,}65 = 1{,}71$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,81 do 1,71.

4.19. Poznámka: Exponenciální a Poissonovo rozložení mají úzkou souvislost. Jestliže náhodná veličina X, která udává počet událostí za časovou jednotku, se řídí rozložením Po(λ), pak náhodná veličina Y, která udává dobu mezi dvěma po sobě následujícími událostmi, se řídí rozložením Ex(λ).

Vzorce pro meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozložení Po(λ)

1. způsob: Využití Pearsonova rozložení chí-kvadrát:

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm),\ h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2)$$

2. způsob: Využití standardizovaného normálního rozložení:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$$