8. Systémy hromadné obsluhy s omezenou kapacitou

8.1. Systém M/M/1/1

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je 1 (zákazník nemůže čekat ve frontě a přijde-li k obsazenému systému, vůbec nečeká a odchází).

Počet zákazníků v systému v čase t lze modelovat HMŘ se spojitým časem $\{X_t; t \in T\}$ s množinou stavů J = {0, 1} a maticí přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$.

Stacionární rozložení dostaneme ve tvaru: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$.

Význam složek stacionárního rozložení:

$a_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ … pravděpodobnost, že v systému není žádný zákazník

$a_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ … pravděpodobnost, že v systému je právě 1 zákazník = pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut = P_Z

Charakteristiky systému:
Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda a_0$
Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda a_1$

Využití systému: $\kappa = \rho a_0 = \dfrac{\lambda}{\mu} a_0$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 = a_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \dfrac{E(N)}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$

8.2. Příklad: Je známo, že počet příchozích hovorů na jistou telefonní linku se řídí Poissonovým rozložením, přičemž v průměru přichází 1 hovor za 1 h. Dále je známo, že doba trvání hovoru se řídí exponenciálním rozložením a hovor trvá v průměru 20 minut. Jestliže je linka obsazená, nový volající okamžitě zavěsí. Vypočtěte, jaké procento lidí se nedovolalo.

Řešení: $\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat.

$a_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} = \dfrac{1}{4} = 25\%$. Nedovolá se 25 % lidí.

8.3. Systém M/M/1/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ, v systému je 1 linka obsluhy, systém má kapacitu m a frontový režime je FIFO. Je-li systém obsazen, další zákazníci odcházejí bez obsloužení. Ve frontě může být nejvýše m – 1 zákazníků.

Počet zákazníků, kteří jsou v systému v okamžiku t, je náhodná veličina X_t a stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, množinou stavů J = {0, 1, …, m}, vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, 0, …, 0) a maticí intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Označme $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Odvodíme stacionární rozložení tohoto systému. Vyřešíme systém rovnic **aQ** = **0** s normalizační podmínkou $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$ a zjistíme, že $a_j = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0 = \rho^j a_0$, j = 1, 2, …, m.

Hodnotu a_0 odvodíme z normalizační podmínky: $a_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m} \rho^j} = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{m} \rho^j}$. Řada ve jmenovateli je konečná a její součet je $\sum_{j=0}^{m} \rho^j = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ m+1 \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$, tedy $a_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+1} \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$.

Charakteristiky systému

Stř. hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N)=\sum_{j=0}^{m} ja_j = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(m+1)\rho^m + m\rho^{m+1}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+1})} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m}{2} \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$

Stř. hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q)=\sum_{j=1}^{m} (j-1)a_j = E(N)-(1-a_0) = \begin{cases} E(N)-\dfrac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho^{m+1}} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ E(N)-\dfrac{m}{m+1} \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$

Stř. hodnota počtu obsloužených zákazníků: $\lambda_P = \lambda(1-a_m)$, $a_m = \begin{cases} \dfrac{\rho^m(1-\rho)}{1-\rho^{m+1}} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+1} \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$

Stř. hodnota doby strávené v systému: $E(W)=\dfrac{E(N)}{\lambda_P}$, ve frontě: $E(W_Q)=\dfrac{E(N_Q)}{\lambda_P}$

Pravděp., že zákazník nebude obsloužen (tj. v systému je již m požadavků): $a_m = a_0\rho^m$

Pravděp., že zákazník bude obsloužen: $1 - a_m$

8.4. Příklad: Během osmihodinové směny dojde v průměru ke 12 poruchám strojů. Oprava trvá v průměru půl hodiny. Pokud je opravář obsazen, ve frontě na opravu mohou čekat maximálně tři stroje. Stanovte základní charakteristiky systému.

Řešení: Jde o systém M/M/1/4/FIFO.

$$\lambda = \frac{12}{8} = 1{,}5,\ \mu = \frac{1}{0{,}5} = 2,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$$

Pravděpodobnost, že opravář je volný: $a_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}} = \frac{1-0{,}75}{1-0{,}75^5} = 0{,}3278$

Pravděpodobnost, že stroj nebude opraven v důsledku omezené kapacity systému:

$$a_4 = a_0\rho^4 = 0{,}1037$$

Stř. hodnota počtu opravených strojů: $\lambda_P = \lambda(1-a_m) = 1{,}5(1-0{,}1037) = 1{,}3444$

Stř. hodnota počtu strojů v systému: $E(N) = \frac{\rho\left[1-(m+1)\rho^m + m\rho^{m+1}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+1})} = \frac{0{,}75(1-5\cdot 0{,}75^4 + 4\cdot 0{,}75^5)}{0{,}25(1-0{,}75^5)} = 1{,}4443$

Stř. hodnota počtu strojů ve frontě: $E(N_Q) = E(N) - \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho^{m+1}} = 1{,}4443 - \frac{0{,}75(1-0{,}75^4)}{1-0{,}75^5} = 0{,}7721$

Stř. hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{E(N)}{\lambda_P} = \frac{1{,}4443}{1{,}3444} = 1{,}0743\text{h} = 1\text{h}\ 4\min\ 30\text{s}$

Stř. hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda_P} = \frac{0{,}7721}{1{,}3444} = 0{,}5743\text{h} = 34\min\ 30\text{s}$

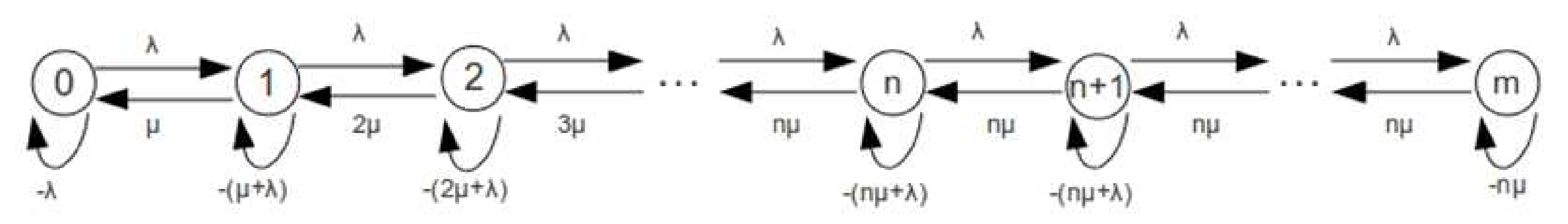
8.5. Otevřený systém M/M/n/m/FIFO

Kapacita systému s n linkami je omezená, je rovna m, $m \geq n$. Zákazník, který přijde k plně obsazenému systému je odmítnut. Ve frontě tedy může být nejvýše $m - n \geq 0$ zákazníků. Počet zákazníků, kteří jsou v systému v okamžiku t, je náhodná veličina X_t a stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se spojitým časem, množinou stavů $J = \{0, 1, \ldots, m\}$, vektorem počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ a maticí intenzit přechodu

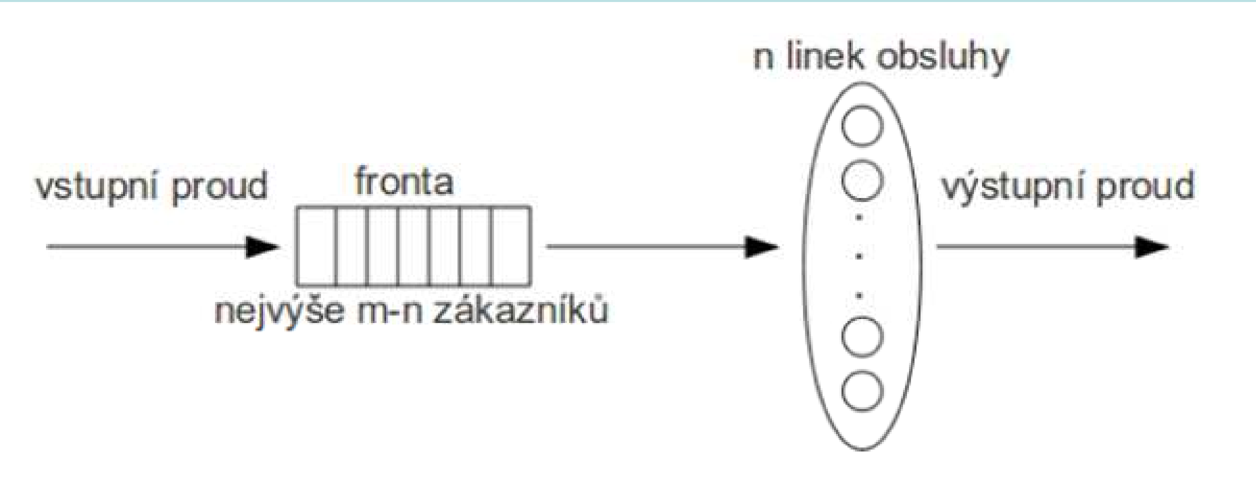
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n\mu & -(n\mu+\lambda) & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n\mu & -(n\mu+\lambda) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

kde $\lambda > 0$ je intenzita vstupního proudu a $\mu > 0$ je intenzita obsluhy. Je-li v systému víc zákazníků než linek obsluhy ($j > n$, $j < m$), jsou intenzity obsluhy stejné jako pro $j = n$.

Přechodový diagram:



Ilustrace:



Stacionární rozložení:

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\beta}{n}$. Obvyklým způsobem (tj. řešením systému **aQ** = **0**, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$) odvodíme, že stacionární rozložení je:

$$a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}, \text{ kde } a_0 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j \right)^{-1}.$$

Stacionární rozložení existuje vždy.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = a_m = \dfrac{n^n}{n!}\rho^m a_0$.

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = \begin{cases} a_n \dfrac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}$.

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda(1 - P_Z)$.

Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \beta(1 - P_Z)$.

Využití systému: $\kappa = \rho(1 - P_Z)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

8.6. Příklad: Na jistém oddělení nemocnice jsou na dvou operačních sálech nepřetržitě prováděny urgentní operace. Na každém sále se v průměru operují 4 pacienti za den a na oddělení přichází v průměru 7 pacientů za den. Přitom z organizačních důvodů bylo stanoveno, že na pořadníku může být maximálně 10 pacientů, ostatní jsou odesíláni jinam. Určete základní charakteristiky tohoto systému hromadné obsluhy.

Řešení: Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 2, m = 10 + 2 = 12, λ = 7, μ = 4, c, $\beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{4}$,

$$\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{7}{8}.$$

Pravděpodobnost, že systém je prázdný:

$$a_0 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j \right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{1} \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^j}{j!} + \frac{2^2}{2!} \sum_{j=2}^{12} \left(\tfrac{7}{8}\right)^j \right)^{-1} = 0{,}0821$$

Pravděpodobnost, že pacient bude odeslán jinam:

$$P_Z = a_m = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0 = \frac{2^2}{2!} \left(\frac{7}{8} \right)^{12} 0{,}0821 = 0{,}0331$$

Pravděpodobnost, že pacient bude čekat:

$$P_Q = a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} = a_2 \frac{1-\rho^{10}}{1-\rho} = \frac{\beta^2}{2!} a_0 \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^{10}}{1-\frac{7}{8}} = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{2} 0{,}0821 \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^{10}}{1-\frac{7}{8}} = 0{,}7411$$

Střední hodnota počtu čekajících pacientů:

$$E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j = \sum_{j=3}^{12} (j-2) a_j = \sum_{j=3}^{12} (j-2) 2\left(\tfrac{7}{8}\right)^j a_0 = \sum_{j=3}^{12} (j-2) 2\left(\tfrac{7}{8}\right)^j 0{,}0821 = 2{,}8729$$

Pravděpodobnost, že oba sály budou obsazeny:

$$P(N \geq 2) = 1 - a_0 - a_1 = 1 - a_0 - \beta a_0 = 1 - 0{,}0821 - \tfrac{7}{4} 0{,}0821 = 0{,}7742$$

Využití systému: $\kappa = \rho(1 - P_Z) = \frac{7}{8}(1 - 0{,}0331) = 0{,}8461$

Střední hodnota počtu operovaných pacientů: $E(N_S) = \beta(1 - P_Z) = \frac{7}{4}(1 - 0{,}0331) = 1{,}6921$

Střední hodnota počtu pacientů v systému: $E(N) = E(N_S) + E(N_Q) = 1{,}6921 + 2{,}8729 = 4{,}5651$

Střední hodnota pročekané doby: $E(W_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda} = \frac{2{,}8729}{7} = 0{,}4104\ \text{dne} = 9\ \text{h}\ 51\ \text{min}$

Střední hodnota doby operace: $E(W_S) = \frac{E(N_S)}{\lambda} = \frac{1{,}6921}{7} = 0{,}2417\ \text{dne} = 5\ \text{h}\ 48\ \text{min}$

Střední hodnota doby strávené v systému:

$E(W) = E(W_S) + E(W_Q) = 0{,}2417 + 0{,}4104 = 0{,}6522$ dne = 15 h 39 min

Charakteristiky stabilizovaného systému M/M/n/m/FIFO počítá funkce odmitani.m

```
% [a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)
% Vypocita stacionarní rozlozeni, vyuziti a charakteristiky systemu
% hromadne obsluhy s omezenou kapacitou M|M|n|m|FIFO s odmitanim.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupniho proudu
% mi ........ parametr obsluhy
% n ......... pocet linek obsluhy
% m ......... kapacita systému
% Vystupní parametry:
% a ......... stacionární rozlození
% PZ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude odmitnut
% PQ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude cekat ve fronte
% lambdaP ... stredni hodnota poctu prijatych zakazniku za jednotku casu
% lambdaZ ... stredni hodnota poctu odmitnutych zakazniku za jednotku casu
% ENS ....... stredni hodnota poctu obsluhovanych zakazniku
% ENQ ....... stredni hodnota poctu zakazniku ve fronte
% EN ........ stredni hodnota poctu zakazniku v systemu
% EWS ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi obsluhou
% EWQ ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi ve fronte
% EW ........ stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi v systemu
```

8.7. Příklad: Je známo, že systém M/M/2/5/FIFO je využíván na 68,62 %.
a) Kolik procent přicházejících zákazníků bude odmítnuto?
b) Zjistěte střední hodnotu počtu čekajících zákazníků.

Řešení: n = 2, m = 5, $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{\beta}{2}, \kappa = \rho(1 - P_Z) = 0,6862$

$P_Z = a_5 = \frac{2^2}{2!}\rho^5 a_0 = 2\rho^5 a_0 = 2\frac{\beta^5}{2^5}a_0 = \frac{\beta^5}{16}a_0$, tedy $\kappa = \rho(1 - P_Z) = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\beta^5}{16}a_0\right) = 0,6862$

$a_0 = \left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{j=n}^{m}\rho^j\right)^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{1}\frac{\beta^j}{j!} + 2\sum_{j=2}^{5}\left(\frac{\beta}{2}\right)^j\right)^{-1} = \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{4} + \frac{\beta^4}{8} + \frac{\beta^5}{16}\right)^{-1}$. Nyní a_0 dosadíme do vzorce pro κ a dostaneme rovnici:

$$\frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\frac{\beta^5}{16}}{1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{4} + \frac{\beta^4}{8} + \frac{\beta^5}{16}}\right) = 0,6862$$

K jejímu řešení použijeme symbolický toolbox systému MATLAB:

```
syms x;
solve(0.5*x*(1-(0.0625*x^5/(1+x+0.5*x^2+0.25*x^3+0.125*x^4+0.0625*x^5)))-0.6862)
```

Zjistíme, že β = 1,5 a dále a_0 = 0,1793.
V úkolu (a) počítáme pravděpodobnost odmítnutí zákazníka, tedy

$$P_Z = a_5 = \frac{2^2}{2!}\rho^5 a_0 = 2\rho^5 a_0 = 2\frac{\beta^5}{2^5}a_0 = \frac{\beta^5}{16}a_0 = \frac{1{,}5^5}{16}\cdot 0{,}1793 = 0{,}0851$$

Vidíme, že bude odmítnuto 8,5 % přicházejících zákazníků.
V úkolu (b) počítáme střední hodnotu počtu čekajících zákazníků, tj.

$$E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m}(j-n)a_j = \sum_{j=3}^{5}(j-2)a_j = a_3 + 2a_4 + 3a_5$$

$$a_j = \frac{n^n}{n!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\dots,m$$

$$a_3 = 2\rho^3 a_0 = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 a_0 = 2\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^3 0{,}1793 = 0{,}1513$$

$$a_4 = 2\rho^4 a_0 = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^4 a_0 = 2\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^4 0{,}1793 = 0{,}1135$$

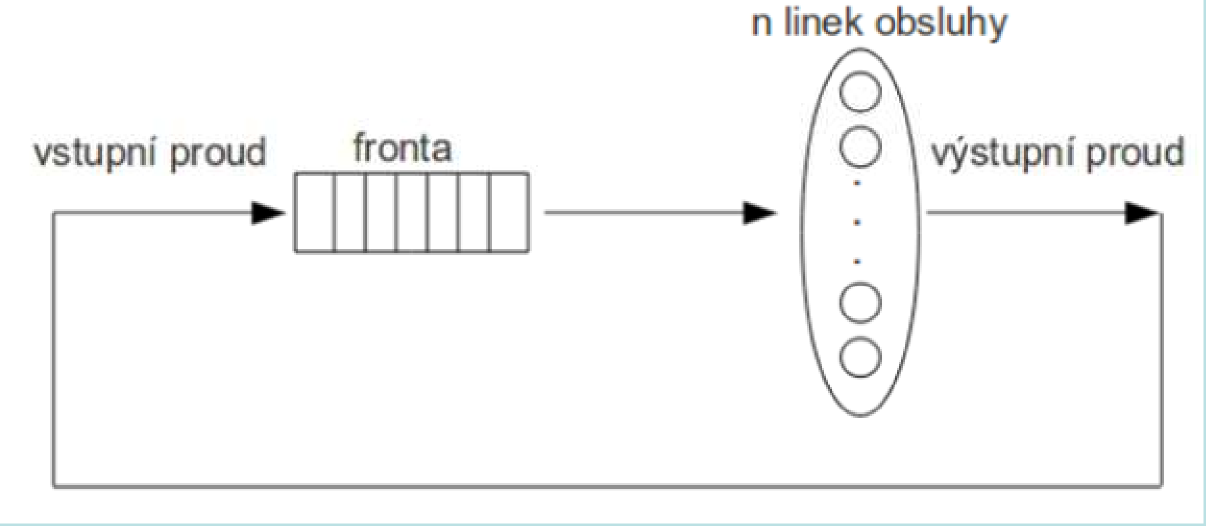
$$a_5 = 2\rho^5 a_0 = 2\left(\frac{\beta}{2}\right)^5 a_0 = 2\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^5 0{,}1793 = 0{,}0851$$

Po dosazení do vzorce pro $E(N_Q)$ máme: $E(N_Q) = 0{,}1513 + 2\cdot 0{,}1135 + 3\cdot 0{,}0851 = 0{,}6336$
Znamená to, že v průměru čeká ve frontě 0,6336 zákazníků.

8.8. Uzavřený (cyklický) systém M/M/n/m/FIFO

V tomto systému cirkuluje m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky $m - n \geq 0$. Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem.

Ilustrace:



Doba pobytu každého zákazníka mimo systém má rozložení Ex(λ), doba obsluhy u každé z n linek obsluhy se řídí rozložením Ex(μ).

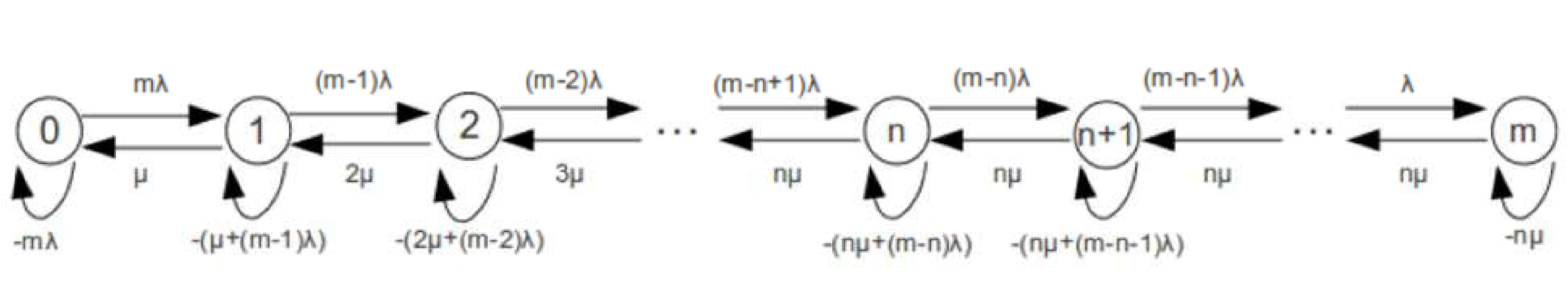
Systém, lze modelovat pomocí procesu vzniku a zániku $\{X_t; t \in T\}$ s množinou stavů $J = \{0, 1, \ldots, m\}$, kde stavy interpretujeme takto:

0 … systém je prázdný
.
.
.
n … v systému je n obsluhovaných zákazníků, ostatních m – n je mino systém
n+1 … n obsluhovaných, 1 ve frontě, m – n –1 mimo systém
.
.
.
m … n obsluhovaných, m – n ve frontě
Vektor počátečních pravděpodobností je **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matice přechodu má tvar:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -(\mu + (m-1)\lambda) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n\mu & -(n\mu + (m-n)\lambda) & (m-n)\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n\mu & -(n\mu + (m-n-1)\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -n\mu \end{pmatrix}$$

kde λ > 0 je intenzita vstupního proudu a μ > 0 je intenzita obsluhy.

Přechodový diagram:



Stacionární rozložení:

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\beta}{n}$. Obvyklým způsobem (tj. řešením systému **aQ** = **0**, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$) odvodíme, že stacionární rozložení je:

$$a_j = \begin{cases} \binom{m}{j} \beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{m!}{(m-j)!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}, \text{ kde } a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j .$$

Stacionární rozložení existuje vždy.

Charakteristiky systému:

Střední hodnot počtu zákazníků v systému: $E(N)=\sum_{j=0}^{m} ja_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S)=\sum_{j=0}^{n-1} ja_j + n\sum_{j=n}^{m} a_j$.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém: $E(N_R)=m-E(N)$.

Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících z jednotku času: $\lambda_R = \lambda E(N_R)$.

Využití systému: $\kappa=\rho E(N_R)$.

Další charakteristiky lze získat z Littleova vzorce.

8.9. Příklad: Ve firmě jsou k dispozici 2 kopírky pro 5 zaměstnanců, přičemž každý z nich přichází kopírovat v průměru jednou za 40 minut. Průměrná doba kopírování je 4 minuty. Předpokládáme, že vstupní proud je Poissonův proces a doba kopírování se řídí exponenciálním rozložením.

a) Jaká je pravděpodobnost, že kopírky nebudou využity?

b) Jaká je pravděpodobnost, že zaměstnanec, který přichází ke kopírkám, bude muset čekat?

c) Jaká je střední hodnota délky fronty?

Řešení: n = 2, m = 5, $\lambda = \frac{1}{40}, \mu = \frac{1}{4}, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{10}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{1}{20}$. Vypočteme stacionární rozložení

$$a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}, \text{ kde } a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j .$$

$$a_1 = \binom{5}{1}\frac{1}{10}a_0 = \frac{1}{2}a_0,\ a_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 a_0 = \frac{1}{10}a_0,\ a_3 = 2\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{20}\right)^3 a_0 = 120\left(\frac{1}{20}\right)^3 a_0,$$

$$a_4 = 2\frac{5!}{1!}\left(\frac{1}{20}\right)^4 a_0 = 240\left(\frac{1}{20}\right)^4 a_0,\ a_5 = 2\frac{5!}{0!}\left(\frac{1}{20}\right)^5 a_0 = 240\left(\frac{1}{20}\right)^5 a_0,\ a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{5} a_j = 0{,}6186$$

Ad a) Pravděpodobnost, že kopírky nebudou využity, je $a_0 = 0{,}6186$.

Ad b) pravděpodobnost, že zaměstnanec, který přichází ke kopírkám, bude muset čekat, je

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 1 - a_0 - a_1 = 1 - 0{,}6186 - 0{,}3093 = 0{,}0721$$

Ad c) Střední hodnota délky fronty: $E(N_Q) = E(N) - E(N_S)$, přičemž

$E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j = 0{,}4648$, $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n \sum_{j=n}^{m} a_j = 0{,}4535$, tedy $E(N_Q) = 0{,}0113$.

Charakteristiky uzavřeného systému M/M/n/m/FIFO počítá funkce uzavreny.m.

Syntaxe: [a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)

Vstupní parametry:

lambda .... parametr vstupního proudu

mi .... parametr obsluhy

n .... počet linek obsluhy

m .... kapacita systému

Výstupní parametry:

a .... stacionární rozložení

ENS .... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků

ENR .... střední hodnota počtu zákazníků mimo systém

EN .... střední hodnota počtu zákazníků v systému

lambdaR ... střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času

kappa ..... využití systému