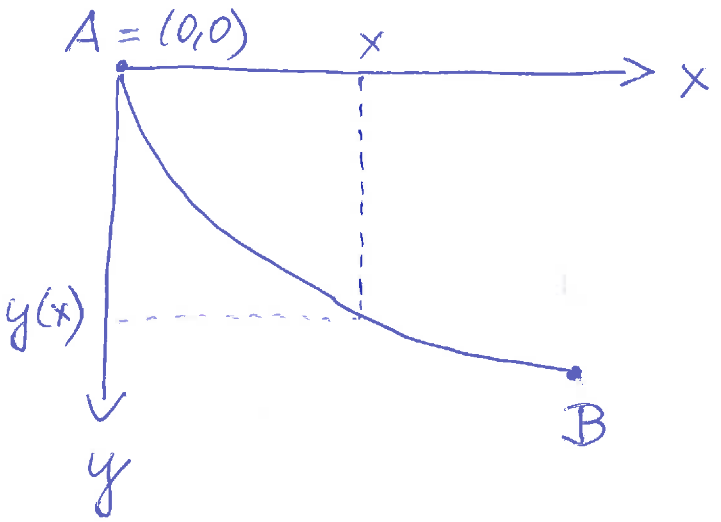
1. PŘEDNÁŠKA

Motivace Co nejrychlejší skluzavka aneb úloha o brachistochroně



$$\frac{1}{2} m v^2 = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy(x)}$$

$$\ell(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y'(s))^2}\, ds$$

$$\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1+(y'(x))^2}$$

$$\frac{d\ell(x)}{dt} = v \implies dt = \frac{d\ell}{v} = \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}\, dx$$

Čas potřebný na sklouznutí z bodu $A = (0,0)$ do bodu $B = (x_B, y_B)$ je tedy

$$t = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\, dx$$

Ten chceme, aby byl minimální. Tedy hledáme minimum funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\, dx .$$

Funkcionál je zobrazení z nějakého prostoru funkcí do reálných čísel. Variační počet se zabývá hledáním extrémů funkcionálů. Velmi často vypadají funkcionály „ze života" takto:

$$\Phi : \{u \in C^1[a,b],\ u(a) = A,\ u(b) = B\} \to \mathbb{R}$$

$$(*) \qquad \Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx,$$

kde f tzv. Lagrangián. Je to funkce z $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spojitá v $[a,b]$ a spojitě diferencovatelná v druhé a třetí proměnné.

Variace funkcionálu. Nechť $\varphi \in C^1[a,b]$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$. Uvažujme ~~funkci~~ nějaké pevné $u \in C^1[a,b]$, $u(a) = A$, $u(b) = B$ a funkci

$$g(t) = \Phi(u + t\varphi)$$

Jestliže g má derivaci v $t = 0$, hovoříme o variaci funkcionálu Φ v u ve směru φ.

$$\delta\Phi(u;\varphi) = g'(0)$$

Jestliže Φ nabývá ve funkci u svého lokálního extrému, a pro funkci φ existuje variace Φ ve směru φ, tak nutně

$$\delta \Phi(u;\varphi) = 0.$$

Co to znamená pro náš funkcionál (*)?

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+t\varphi)-\Phi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_a^b \frac{1}{t}\Big[f(x, u(x)+t\varphi(x), u'(x)+t\varphi'(x)) - f(x,u(x),u'(x))\Big]\,dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[f(x, u(x)+t\varphi(x), u'(x)+t\varphi'(x)) - f(x,u(x),u'(x))\Big]\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} f(x, u(x)+t\varphi(x), u'(x)+t\varphi'(x))\right]_{t=0} dx =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x,u(x),u'(x))\,\varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial u'}(x,u(x),u'(x))\,\varphi'(x)\right] dx$$

Předpokládejme, že existuje spojitá derivace $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)$. Potom na druhý sčítanec použijeme integraci per partes. Díky tomu, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ dostaneme

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u'}(x,u(x),u'(x))\right]\varphi(x)\,dx$$

Za předpokladu, že funkce v hranaté závorce je spojitá a vztah platí pro všechny funkce $\varphi \in C^1[a,b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, musí být výraz v závorce roven 0. (Dokážeme sporem. Kdyby v nějakém x nebyl, zvolíme φ tak, že integrál bude nenulový!)

Dostáváme tedy tzv. Eulerovu rovnici pro funkcionál (*)

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u'}(x, u(x), u'(x)) = 0.$$

To je nutná podmínka pro existenci extrému daného funkcionálu.

Zpět k brachistochroně

V případě brachistochrony nezávisí f na x, proto z (E) po vynásobení u' dostáváme

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}(u, u')\, u' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right) u' =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} u' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'} \cdot u'\right) + \frac{\partial f}{\partial u'} u'' =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial u'} u'' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'} \cdot u'\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial u'} u'\right)$$

Tedy
$$f - \frac{\partial f}{\partial u'} u' = c$$
kde c je nějaká konstanta.

Vezmeme nyní za u funkci y a
$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}$$
(na zg výsledek celému nezáleží).

Pro funkci popisující brachistochronu dostaneme

$$f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = \frac{1}{\sqrt{(1+(y')^2)\, y}} = \text{konst.}$$

Tedy
$$(1+(y')^2)\, y = 2C$$

Křivku $(x, y(x))$ parametrizujme pomocí proměnné τ tak, aby
$$y' = \cot g\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

Odtud
$$y = \frac{2C}{1+(y')^2} = 2C \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = C(1-\cos\tau)$$

Odečtujeme závislost x na τ:
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d}{d\tau}\left(C(1-\cos\tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{y'} \cdot C \sin \tau = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\, 2C \sin\frac{\tau}{2} \cos\frac{\tau}{2} =$$

$$= 2C \sin^2 \frac{\tau}{2} = C(1-\cos\tau)$$

Odtud

$$x = c(\tau - \sin\tau)$$

Nechť parametrizace brachistochrony je na intervalu $\tau \in [0, \tau^*]$. Pak

$$x(0) = 0 \,, \quad y(0) = 0$$

$$x(\tau^*) = x_B = C(\tau^* - \sin\tau^*)$$

$$y(\tau^*) = y_B = C(1 - \cos\tau^*)$$

Platí

$$\frac{x_B}{y_B} = \frac{\tau^* - \sin\tau^*}{1 - \cos\tau^*} = g(\tau^*)$$

Funkce $g : (0, 2\pi) \longrightarrow (0, \infty)$ je rostoucí a surjektivní existuje právě jedna τ^*, které rovnost splňuje. Potom položíme

$$C = \frac{y_B}{1 - \cos\tau^*} .$$

Nalezená křivka splňuje nutnou podmínku pro minimum funkcionálu. Že jde ale o skutečné globální minimum, nebo aspoň lokální minimum není z předchozího jasné.

Daleko jednodušší úloha – najít křivku, která je nejkratší spojnicí bodů (a, A) a (b, B) v rovině. Hledejme ji ve tvaru ~~[illegible]~~ (předpokládáme $a < b$) $(x, y(x))$.

Jde o to minimalizovat funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

jeho Eulerova rovnice je

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst.}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{konst.}$$

Funkce $g(z) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ má derivaci $g'(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{3/2}} > 0$

tedy

$$y' = \text{konst}$$

Odtud

$$y(x) = \frac{B}{b-a}(x-a) + A. \quad (*)$$

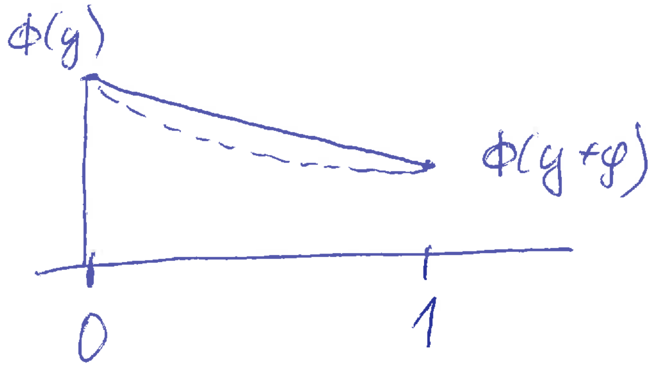
O této funkci lze ukázat, že je globálním minimem funkcionálu Φ metodou funkce $h(t) = \Phi(y + t\varphi)$ pro dané funkce y a φ

je konvexní. (Spočtěte druhou derivaci podle t a ta bude kladná.)

Předpokládejme, že pro q splňující $(*)$ a nějaké φ platí

$$\Phi(q+\varphi) < \Phi(q).$$

Z konvexnosti ~~g~~ h na $[0,1]$ plyne, že graf $h(t) = \Phi(q+t\varphi)$ leží pod grafem lineární funkce spojující body $(0,\Phi(q))$ a $(1,\Phi(q+\varphi))$.



Odtud však plyne, že $g'(0) < 0$, což je spor ~~s předpokladem, že g(t)~~ s tím, že $g'(0) = 0$.

Hamiltonův princip z fyziky

Soustava hmotných bodů, které se pohybují po drahách $q_1, q_2, \dots q_n$ v $\mathbb{R}^3$ s rychlostmi $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n$. Lagrangián $L(t, q_j, \dot{q}_j)$

je obvykle rozdíl kinetické a potenciální energie. Funkcionál

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(t, q_j, \dot{q}_j)\, dt$$

se nazývá akce. Hamiltonův princip říká, že dráhy po kterých se body pohybují jsou ty, kde je variace akce nulová. Tento princip vede k tzv. Lagrangeovým rovnicích

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

pokud L nezávisí na t.

OBECNÁ FORMULACE VARIAČNÍ ÚLOHY

Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^n$. Nechť

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, u, s) \longmapsto f(x, u, s)$$

je funkce. Budeme zpravidla vyšetřovat funkcionály

$$\Phi(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

pro funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ a jejich 1. derivace $\nabla u(x)$, které případně splňují nějaké další, např. okrajové podmínky.