2. PŘEDNÁŠKA

Literatura:

Gelfand, Fomin: Calculus of variations (je v knihovně PřF), Dover Publications, 1991

Kot: A first course in the calculus of variations AMS 2014

Normované lineární prostory

- pojem normy, metrika určená normou
- úplný NLP se nazývá Banachův prostor

Příklady: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená omezená

$C(\bar{\Omega})$ spojité funkce na $\bar{\Omega}$ $\quad \|u\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$

$C^1(\bar{\Omega})$ spojitě diferencovatelné funkce na $\bar{\Omega}$ $\quad \|u\|_1 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| + \sum_{i=1}^{n} \sup \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|$

$C^1_0(\bar{\Omega})$ spojitě dif. funkce na $\bar{\Omega}$ rovné 0 na $\partial\Omega$

Derivace zobrazení mezi NLP

Nechť $F : X \longrightarrow Y$ je zobrazení, X, Y NLP

Derivace F v bodě x_0 ve směru $h \in X$ je

$$\delta F(x_0; h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} \in Y,$$

pokud existuje.

Existuje-li derivace ve směru h pro všechna $h \in X$ dostáváme zobrazení

$$\delta F(x_0;-) : X \longrightarrow Y$$

je-li toto zobrazení lineární a spojité, mluvíme o Gateauxově derivaci zobrazení F v bodě x_0, značení

$$DF(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$$ – množina spoj. lin. zobrazení

jestliže navíc platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - DF(x_0)h}{\|h\|} = 0 \in Y,$$

pak hovoříme o Frechetově derivaci F v bodě x_0, značení

$$F'(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y).$$

F je třídy C^1, jestliže $F' : X \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ je spojité.

Jak je to s diferencovatelností funkcionálů

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

Φ je složení dvou zobrazení. První je

$$u \longmapsto f(-, u(-), u'(-)),$$

druhé je

$$v \longmapsto \int_a^b v(x)\, dx$$

Druhé zobrazení je spojitý lineární funkcionál

$$C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

neboť

$$\left| \int_a^b v(x)\, dx \right| \le (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |v(x)| = (b-a)\|v\|.$$

Pro lineární spojité zobrazení $A: X \to Y$ platí, že

$$A'(x_0)h = Ah.$$

Vlastnosti 1. zobrazení zjistíme zkoumáním vlastností tzv. Němyckého operátoru.

Nechť $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$

$$f^\#: C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$$

$$f^\#(u)(x) = f(x, u(x))$$

Věta o spojitosti Němyckého operátoru

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a omezená, $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Pak

$$f^\#: C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$$

je spojité zobrazení.

Dk: Nechť $u_j \to u$ v $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. To znamená stejnoměrnou konvergenci $u_j \rightrightarrows u$. Odtud plyne existence K takového, že $|u_j(x)| \le K$ pro všechna $x \in \bar{\Omega}$.
Položme $M = [-K, K]^m \subset \mathbb{R}^m$.
Pak $\bar{\Omega} \times M$ je kompaktní v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a tedy $f / \bar{\Omega} \times M$ je stejnoměrně spojitá. Chceme dokázat, že $f(\cdot, u_j(\cdot)) \rightrightarrows f(\cdot, u(\cdot))$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall s, t \in M \quad \|s - t\| < \delta \Rightarrow \|f(x,s) - f(x,t)\| < \varepsilon$

Pro $\delta > 0$ najdeme j_0, že pro $j \geq j_0$ a všechna $x \in \overline{\Omega}$ je $\|u_j(x) - u(x)\| < \delta$. Pak

$$|f(x, u_j(x)) - f(x, u(x))| < \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat. ▨

Věta o diferencovatelnosti Němyckého operátoru

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a omezená, nechť $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ je spojitě diferencovatelná v 2. proměnné.
Pak $f^{\#} : C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \longrightarrow C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$
je třídy C^1 a jeho Frechetova derivace je

$$(f^{\#})'(u)\, h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u(x)) \cdot h_i(x).$$

Důkaz: Položme

$$(Au)\, h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u(x))\, h_i(x)$$

To je lineární zobrazení v h z $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ do $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, které je spojité, neboť

$$\|A(u)h\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i}(\cdot, u(\cdot)) \right\| \right) \|h\|$$

Rozdíl

$$w(h) = f^{\#}(u+h) - f^{\#}(u) - A(u)h$$

má v $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ normu

$$\|w(h)\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |w(h)(x)| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u(x) + t h(x))\, h_i(x) \right) dt - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u(x))\, h_i(x) \right|$$

$$\leq \int_0^1 \| A(u+th) - A(u) \| \, dt \quad \|h\|$$

Tedy $\quad \lim_{h \to 0} \dfrac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0.$ ▨

Příklad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a omezená,

$f : \bar\Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, u, s) \mapsto f(x,u,s)$

spojitá a třídy C^1 v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pak

$$F : C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\bar\Omega, \mathbb{R})$$

$$F(u) = f\left(-, u(-), \frac{\partial u}{\partial x_i}(-)\right)$$

je třídy C^1 a

$$F'(u) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-, u(-), \frac{\partial u}{\partial x_i}(-)\right) h(-) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial s_i}\left(-, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i}(-)\right) \frac{\partial h}{\partial x_i}(-)$$

Příklad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a omezená,

$f : \bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

spojitá a třídy C^1 v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pak

$$\Phi : C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(u) = \int_{\bar\Omega} f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) dx$$

je třídy C^1 a

$$\Phi'(u) h = \int_{\bar\Omega} \frac{\partial f}{\partial u}\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) h(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial s_i} \left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\,dx .$$

V dimenzi 1 $\quad \overline{\Omega} = [a,b]$

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a spojitě dif. v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pak

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx$$

má Frechetovu derivaci

$$\Phi'(u)h = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))\, h(x)\,dx$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))\, h'(x)\,dx$$

Eulerova rovnice $\quad$ Minule jsme z platnosti

$$\Phi'(u)h = 0$$

pro všechna $h \in C_0^1[a,b]$ odvodili Eulerovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))\right) = 0$$

První tuto rovnici odvodil roku 1744 Leonard Euler bez toho, že by používal variace nebo derivace v nekonečně dimenzionálních prostorech, viz Gelfand, Fomin, str 27 a 28, nebo Kot, str 28-31

Tak, jak jsme odvodili Eulerovu rovnici minule, to dělal Lagrange (1755)

Dostali jsme nutnou podmínku

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))\, h(x) + \frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))\, h'(x) \right\} dx = 0$$

Použili jsme předpoklad, že $\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))$ je spojitě diferencovatelná podle x. K tomu stačí, že existují spojité $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ a existuje spojitá $u''(x)$.

Předpoklad existence $u''(x)$ je příliš silný, u'' se ve formulaci variační úlohy vůbec nevyskytuje.

Pomocí per partes, díky tomu, že $h(a) = h(b) = 0$, dostaneme

$$0 = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))\, h(x) + \frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))\, h'(x) \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))\, h(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x)) \right) h(x) \right\} dx$$

Protože toto platí pro všechna $h \in C^1[a,b]$, $h(a) = h(b)$ $= 0$, dostáváme Eulerovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Označení $\mathcal{D}(\Omega)$ ... množina hladkých funkcí s kompaktním nosičem v otevřené množině Ω.

Fundamentální lemma variačního počtu

Nechť $G \in C(\overline{\Omega})$. Jestliže pro všechny funkce $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} G(x)\, h(x)\, dx = 0,$$

pak $G(x) \equiv 0$ na $\overline{\Omega}$.

V roce 1879 odvodil du Bois-Reymond Eulerovu rovnici za daleko slabších předpokladů. Vycházel z tohoto tvrzení

<u>du Bois-Reymondovo lemma</u>

Nechť $G \in C(\overline{\Omega})$. Jestliže pro všechny funkce $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ takové, že $\int_\Omega h(x)\,dx = 0$ platí

$$\int_\Omega G(x) h(x)\,dx = 0,$$

pak

$$G(x) \equiv \text{konst. na } \overline{\Omega}.$$

<u>Důkaz</u>: Zvolme $h_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $\int_\Omega h_1(x)\,dx = 1$ a označme

$$c = \int_\Omega G(x) h_1(x)\,dx$$

Dokážeme, že $G(x) \equiv c$. Pro $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ libovolné definujme

$$h^*(x) = h(x) - h_1(x)\int_\Omega h(y)\,dy.$$

Potom

$$\int_\Omega h^*(x)\,dx = 0,$$

takže

$$\int_\Omega (G(x)-c)h(x)\,dx = \int \big(G(x)-c\big)\Big(h^*(x)+h_1(x)\int_\Omega h(y)\,dy\Big)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_\Omega G(x)\,h^*(x)\,dx}_{=0} + \underbrace{\left(\int_\Omega G(x)\,h_1(x)\,dx - c\right)}_{=0}\int_\Omega h(y)\,dy = 0$$

Podle předchozího lemmatu je tedy

$$G(x) - c \equiv 0 \text{ na } \overline{\Omega}.$$

■

Odvození Eulerovy rovnice podle du Bois-Reymonda

Pro všechna $h \in \mathcal{D}(a,b)$ platí

$$0 = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))\, h(x) + \frac{\partial}{\partial s} f(x, u(x), u'(x))\, h'(x) \right\} dx$$

$$= \int_a^b \left\{ -A(x)\, h'(x) + \frac{\partial}{\partial s} f(x, u(x), u'(x))\, h'(x) \right\} dx,$$

kde $A(x)$ je primitivní funkce k

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x))$$

Protože $\int_a^b h'(x)\, dx = h(b) - h(a) = 0$, je podle předchozího lemmatu

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x)) - A(x) = c$$

Vzhledem k tomu, že $A(x) + c$ je spojitě diferencovatelná, je spojitě diferencovatelná i funkce $\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))$. Tedy

$$\frac{d}{dx} A(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))\right)$$

což dává Eulerovu rovnici. $\square$

Eulerova rovnice pro více proměnných

Uvažujme $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, u, s_1 \dots s_n) \longmapsto f(x, u, s)$$

spojitou a spojitě diferencovatelnou v $\underline{u}$ a v $\underline{s}$.

Chceme minimalizovat funkcionál

$$\Phi(u) = \int_{\overline{\Omega}} f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) dx$$

při splnění podmínky, že $u/\partial\Omega = g$. Již víme, že pro minimum musí platit

$$\Phi'(u)\,h = 0 \quad \text{na } \overline{\Omega}$$

pro všechna $h \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tedy platí

$$0 = \Phi'(u)h = \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x))\, h(x)\, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial s_i}(x, u, \nabla u(x)) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\, dx =$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial u} h\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i} h\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i}\right) h \right) dx$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i}\right) \right\} h(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i} h\right) dx$$

$$= \text{———}''\text{———} + \sum_{i=1}^{n} \int \underbrace{\left(\int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i} h\right) dx_i \right)}_{\substack{=0 \text{ neboť} \\ h = 0 \text{ na } \partial\Omega}} d\ldots$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i}\right) \right\} h(x)\, dx$$

Eulerova rovnice v tomto případě je

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_i}\right) = 0 .$$

<u>Příklad</u> Pro $f(x, u, s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i^2 + G(x)u$, je Eulerova rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - G(x) = 0$$

neboli

$$\Delta u = G \quad , \quad u/\partial\overline{\Omega} = g .$$