4. PŘEDNÁŠKA

Geodetiky Mějme nějakou plochu M v $\mathbb{R}^3$ popsanou pomocí parametrů u a v. Vektor určený počátkem a bodem plochy pro dvojici (u,v) je

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$$

Pár funkcí $u(t)$, $v(t)$ v nějakém parametru odpovídá na ploše M křivka

$$\vec{r}(u(t),v(t)).$$

Tečný vektor k ní je

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(u(t),v(t))\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v}$$

jeho velikost je

$$\sqrt{\left\langle \frac{\partial r}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v}, \frac{\partial r}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v} \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle (\dot{u})^2 + 2\left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle \dot{u}\dot{v} + \left\langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle (\dot{v})^2}$$

$$= \sqrt{E(u,v)(\dot{u})^2 + 2F(u,v)\,\dot{u}\dot{v} + G(u,v)(\dot{v})^2}$$

Funkcionál pro délku křivky $\gamma(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ spojující body $A = \vec{r}(u(a),v(a))$ a $B = \vec{r}(u(b),v(b))$ na ploše M je

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u,v)(\dot{u})^2 + 2F(u,v)\,\dot{u}\dot{v} + G(u,v)(\dot{v})^2}\,dt$$

Příslušné Eulerovy rovnice jsou

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial u}(\dot u)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\dot u \dot v + \frac{\partial G}{\partial u}(\dot v)^2}{2\sqrt{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}} - \frac{d}{dt}\frac{E\dot u + F\dot v}{\sqrt{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v}(\dot u)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot u \dot v + \frac{\partial G}{\partial v}(\dot v)^2}{2\sqrt{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}} - \frac{d}{dt}\frac{F\dot u + G\dot v}{\sqrt{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}} = 0$$

Předpokládejme, že křivku lze parametrizovat podle u jako $(u, v(u))$. Pak dostáváme jednu Eulerovu rovnici

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot v + \frac{\partial G}{\partial v}(\dot v)^2}{2\sqrt{E + 2F\dot v + G(\dot v)^2}} - \frac{d}{du}\frac{F + G\dot v}{\sqrt{E + 2Fv + G(\dot v)^2}} = 0$$

Tato rovnice se podstatně zjednoduší pro některé plochy. Uvažujme sféru v polárních souřadnicích

$-\pi \le v \le \pi$

$0 \le u \le \pi$

$x = r\cos v \sin u \qquad y = r \sin v \sin u \qquad z = r\cos u$

Délka křivky je pak

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b r\sqrt{(\dot u)^2 + \sin^2 u\,(\dot v)^2}\,dt$$

Vezmeme-li parametrizaci $u, v(u)$ je

$$\Phi(v) = \int_a^b r\sqrt{1 + \sin^2 u\,(\dot v)^2}\,du$$

Zvolme souřadnice tak, že máme spojit body v polárních souřadnicích $(u=a, v=0, z)$ a $(u=b>a, v=0, z)$

Eulerova rovnice je

$$\frac{d}{du}\,\frac{\partial}{\partial \dot{v}}\sqrt{1+\sin^2 u\,(\dot{v})^2} = 0$$

$$\frac{\sin^2 u\cdot \dot{v}}{\sqrt{1+\sin^2 u\,(\dot{v})^2}} = c$$

$$v(a)=0,\quad v(b)=0$$

Zřejmě $v(u)=0$ je řešení. Funkcionál

$$\Phi(v) = \int_a^b z\sqrt{1+\sin^2 u\,(\dot{v})^2}\,du$$

je slabě konvexní ~~[illegible]~~. Proto jde o jediné minimum funkcionálu.

Domácí úloha Uvažujte válcovou plochu. Pomocí cylindrických souřadnic napište funkcionál pro délku křivky na této ploše. Napište Eulerovu rovnici, vyřešte ji a dokažte, že řešení je minimem daného funkcionálu.

Minimální rotační plocha

Chceme najít rotační plochu vzniklou rotací grafu funkce $y(x)$ na intervalu $[a,b]$ kolem osy x, ~~[illegible]~~ která má minimální obsah. To znamená, chceme minimalizovat funkcionál

$$\Phi(y) = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Protože x není explicitně v Lagrangiánu

$$f(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$$

má Eulerova rovnice tvar

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst}$$

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha$$

Pro $\alpha = 0$ je $y = 0$ a tedy $y' = 0$, musí být $A = B = 0$.

Je-li $y(x) > 0$ pro nějaké x, je $\alpha > 0$

$$y = \alpha\sqrt{1+y'^2}$$

Odtud

$$y'^2 = \frac{1}{\alpha^2}(y^2 - \alpha^2)$$

$$y' = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{y^2 - \alpha^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}\, dy = \frac{1}{\alpha} \int dx$$

Položme $y(x) = \alpha \cosh u(x)$, substituce dává

$$\int du = \frac{1}{\alpha} \int dx$$

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}(x-\beta)$$

$$y(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)$$

Chceme určit α, β tak, aby

$$\alpha \cosh\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) = A$$

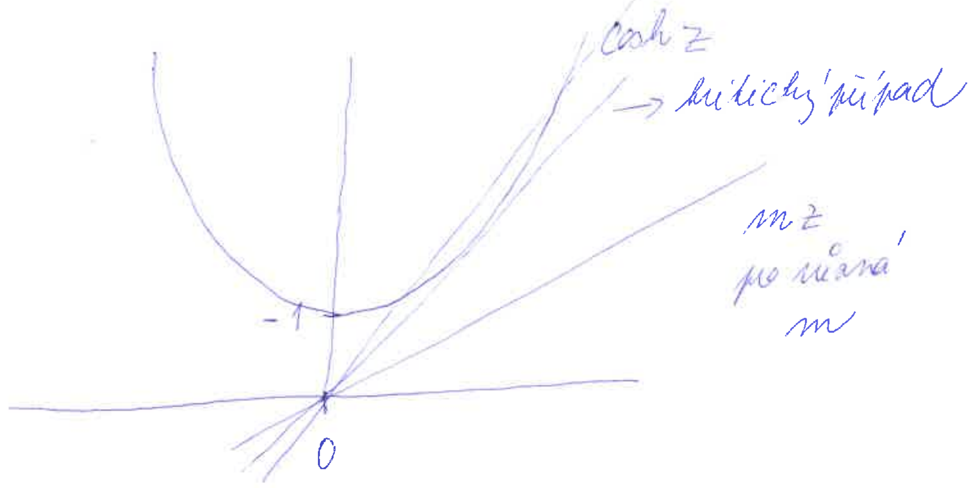
$$\alpha \cosh\left(\frac{b-\beta}{\alpha}\right) = B$$

Nechť $a = -h$, $b = h$, $A = B = k > 0$. Pak $\beta = 0$

$$\cosh\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \frac{k}{\alpha}$$

Pro $z = \frac{h}{\alpha}$ je $\cosh z = m z$ kde $m = \frac{k}{h}$.

Grafické řešení



Kritický případ m_c splňuje rovnice

$$\cosh z_c = m_c z_c$$

$$\sinh z_c = m_c$$

Odtud

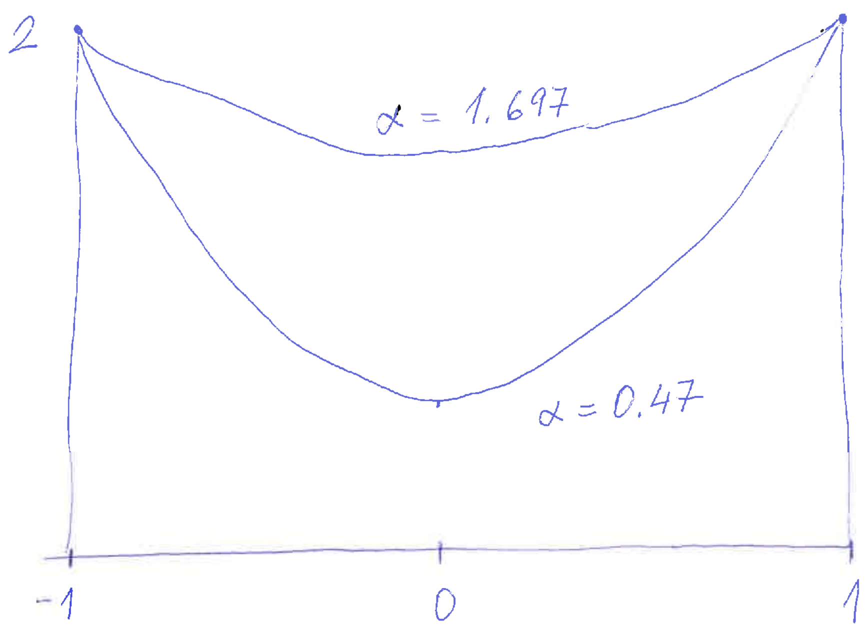
$$\tanh z_c = \frac{1}{z_c}$$

má řešení

$$z_c \approx 1.199679$$

$$m_c \approx 1.508880$$

Pro $m > m_c$ dvě funkce řeší Eulerovu rovnici.



Lze ukázat, že horní funkce dává minimum a dolní funkce není lokálním extrémem.

Abstraktní věty o existenci extrému

Zdola polospojitá funkce Φ na topologickém prostoru T je zobrazení $\Phi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ takové, že $\Phi^{-1}(\alpha, \infty)$ je otevřená pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ (ekvivalentně $\Phi^{-1}(-\infty, \alpha]$ je uzavřená pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

Funkce $\Phi : T \to \mathbb{R}$ je <u>sekvenciálně zdola polospojitá</u>, jestliže pro každou posloupnost $u_n \in T$, $u_n \to u$ je

$$\liminf \Phi(u_n) \geq \Phi(u)$$

<u>Lemma</u>

(a) Je-li $\Phi : T \to \mathbb{R}$ polospojitá zdola, je sekvenciálně zdola polospojitá.

(b) Je-li T metrický prostor, jsou oba pojmy ekvivalentní.

<u>Důkaz (a)</u> Kdyby $\liminf \Phi(u_n) < \Phi(u)$, pak by existovala vybraná posloupnost u_{n_k} taková, že

$$\Phi(u_{n_k}) \leq \alpha < \Phi(u)$$

$\Phi^{-1}[-\infty,\alpha]$ je uzavřená, proto z $u_{n_k} \to u$ plyne $u \in \Phi^{-1}(-\infty,\alpha]$, tedy $\Phi(u) \leq \alpha$, spor s předpokladem.

(b) Dokážeme, že $\Phi^{-1}(-\infty,\alpha]$ je uzavřená. K tomu stačí ověřit, že z $u_n \to u$ a $u_n \in \Phi^{-1}(-\infty,\alpha]$, plyne $u \in \Phi^{-1}(-\infty,\alpha]$. ∎

<u>Věta</u> Nechť T je kompaktní topologický prostor, $\Phi : T \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá funkce. Pak existuje $\min_T \Phi$.

<u>Důkaz.</u> $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(-n,\infty)$ je pokrytí otevřenými množinami. Z něj lze vybrat konečné

Tedy $T = \Phi^{-1}(-n, \infty)$ pro nějaké n, a proto

$\Phi(x) \geq -n$ pro všechna $x \in T$.

Nechť $m = \inf_{x \in T} \Phi(x) \geq -n$.

Kdyby neexistovalo x takové, že $\Phi(x) = m$

Pak by $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(m + \frac{1}{k}, \infty)$

To je otevřené pokrytí kompaktního top. prostoru, lze z něj vybrat konečné. Pak ale

$$T = \Phi^{-1}(m + \frac{1}{k_0}, \infty),$$

což je spor s tím, že $\inf \Phi = m$. $\blacksquare$

Důsledek Nechť X je reálný Banachův prostor, $M \subset X$ je slabě kompaktní a $\Phi : M \to \mathbb{R}$ je slabě zdola polospojitý funkcionál. Pak existuje $\min_M \Phi$.

Slabá topologie na NLP X má báze okolí $\vec{0}$ danou otevřenými množinami

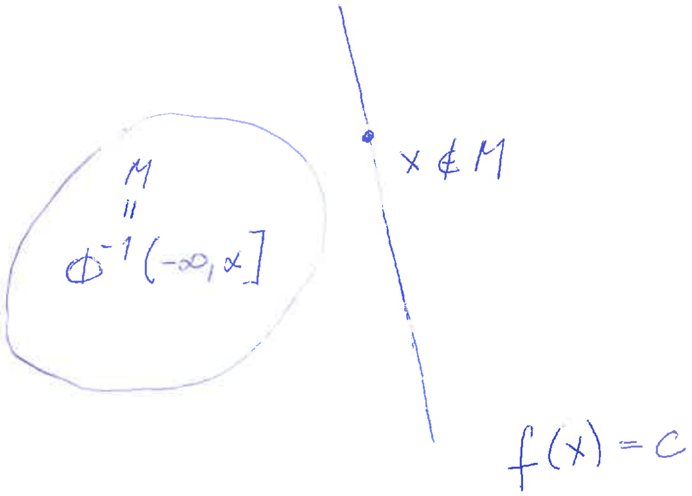
$$U_{f, \varepsilon} = \{x \in X, |f(x)| < \varepsilon\}$$

kde $\varepsilon > 0$ a f probíhá spojité lineární funkcionály na X. Tj. $f \in X^*$ (duál k X)

Důležitá poznámka Je-li X^* separabilní, je slabá topologie na X metrizovatelná.

Věta: Je-li $\Phi: X \to \mathbb{R}$ konvexní a spojitý funkcionál. Pak je Φ zdola slabě spojitý.

Dk. Množiny $\{ x \in X, \ \Phi(x) \leq \alpha \}$ jsou uzavřené a konvexní, ~~a tedy slabě uzavřené~~. Stačí dk, že jsou také slabě uzavřené.



$$M \subseteq f^{-1}(-\infty, c]$$

M lze napsat jako průnik takových poloprostorů určených opěrnými nadrovinami. Proto je M uzavřená. ∎

Věta (Alaoglu) Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak jednotková koule je kompaktní ve slabé topologii.

Bez důkazu

Eberlein-Šmuljanova věta Je-li X Banachův prostor, pak $M \subset X$ je slabě kompaktní právě když je M sekvenciálně slabě kompaktní.

$\Phi : X \to \mathbb{R}$ se nazývá <u>koercivní</u> jestliže
$$\lim_{\|x\|\to\infty} \Phi(x) = \infty.$$

<u>Věta:</u> Nechť X je reflexivní, $\Phi: X \to \mathbb{R}$ koercivní a slabě zdola polospojitý (nebo slabě sekvenciálně zdola polospojitý). Pak Φ nabývá na X svého maxima.

<u>Důkaz:</u> Existuje $\alpha > 0$, že pro $\|x\| > \alpha$ je $\Phi(x) > \Phi(0) + 1$. Množina $M = \{x \in X,\ \|x\| \le \alpha\}$ je slabě zdola polospojitá (sekvenciálně slabě zdola polospojitá). Proto existuje
$$\min_M \Phi$$
a to se rovná $\min_X \Phi$. ∎

<u>Věta:</u> Nechť X je reálný Banachův prostor a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ je ~~slabě~~ striktně konvexní. Pak existuje ~~jediné~~ nejvýše jedno lokální minimum.

již jsme dokazovali.

<u>Příklad</u> $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá a zdola ohraničená. Pak
$$\Phi(u) = \int_0^1 \left((u')^2 + g(u)\right) dx$$
nabývá na $W_0^{1,2}(0,1)$ svého minima.

Prostor $W_0^{1,2}(0,1)$ je Hilbertův a proto je reflexivní.
(Absolutně spojité funkce s derivací v $L^2(0,1)$.
Skalární součin $\langle u,v\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx$.)

$\Phi(u)$ je koercitivní neboť

$$\Phi(u) \ge \int_0^1 (u')^2\,dx - \int_0^1 \cancel{g(u)}\, K\,dx$$

$$\ge \|u\|^2 - K \longrightarrow \infty \text{ pro } \|u\| \longrightarrow \infty$$

Platí totiž $g(u) \ge -K$ pro $K \ge 0$.

Φ je sekvenciálně slabě zdola polospojitý

$\Phi_1(u) = \int_0^1 g(u)\,dx$ je sekvenciálně slabě zdola polospojitý. Nechť $u_n \rightharpoonup u$ ve $W^{1,2}(0,1)$.

Dosazení $u \longmapsto u(x)$ je spojitý lin. funkcionál na $W^{1,2}$

$$|u(x)| = \left|\int_0^x u'(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^x |u'(x)| \cdot 1\,dt\right|$$

$$\le \left(\int_0^x u'^2(t)\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1\,dt\right)^{1/2} \le \|u\|$$

Proto $u_n(x) \longrightarrow u(x)$

$$\liminf g(u_n) \ge g(u)$$

Fatouovo lemma říká, že

$$\int_0^1 g(u)\,dx \le \int \liminf g(u_n)\,dx \le$$

$$\le \liminf \int_0^1 g(u_n)\,dx$$

$\Phi_2(u) = \|u\|^2$ je zdola slabě polospojitá (sekvenciálně).

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \lim \langle u_n, u\rangle \le \liminf \|u\|\,\|u_n\|$$

Odtud $\|u\| \le \liminf \|u_n\|$.

Funkcionál $\Phi_3(u) = \|u\|$ je sekvenciálně slabě zdola polospojitý a nezáporný. Tedy $\Phi_2(u) = \left(\Phi_3(u)\right)^2$ je sekvenciálně slabě zdola polospojitý! ∎