5. PŘEDNÁŠKA

Nutné a postačující podmínky pro extrém pomocí derivací – abstraktní přístup

Věta (Eulerova nutná podmínka)

Nechť X je Banachův prostor a nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $w \in X$ lokální extrém. Existuje-li směrová derivace (variace) $\delta\Phi(w; h)$, pak je rovna 0.

w s vlastností $\delta\Phi(w; h) = 0$ pro všechna $h \in X$ se nazývá kritický bod nebo extremála.

Na základě této věty jsme odvodili Eulerovu rovnici pro $\Phi(u) = \int_\Omega f(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_n})\, dx$.

Fréchetova derivace funkcionálu $\Phi : X \to \mathbb{R}$ je zobrazení $\Phi' : X \to \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Druhá Fréchetova derivace funkcionálu $\Phi : X \to \mathbb{R}$ v bodě w je zobrazení $\Phi''(w) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathbb{R}))$, což je bilineární zobrazení z $X \times X$ do $\mathbb{R}$. Φ'' je pak zobrazení

$$\Phi'' : X \to \underbrace{B(X \times X, \mathbb{R})}_{\text{spojitá bilin. zobrazení}}$$

Věta (Lagrangeova ~~nutná~~ postačující podmínka)

Nechť $w \in X$ je kritický bod funkcionálu

$\Phi : X \to \mathbb{R}$ a nechť Φ je třídy C^2 v okolí w a existuje $\alpha > 0$ takové, že

$$\Phi''(w)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2$$

pro všechna $h \in X$. Potom má Φ v bodě w ostré lokální minimum.

Důkaz je založen na následující větě o střední hodnotě v integrálním tvaru:

$$\Phi(a+h) = \Phi(a) + \Phi'(a)h + \int_0^1 (1-t)\,\Phi''(a+th)(h,h)\,dt$$

Potom pro $\alpha > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $\|h\| < \delta$ je

$$\|\Phi''(w+th) - \Phi''(w)\| < \frac{\alpha}{2}.$$

Pro taková h pak platí

$$\Phi(a+h) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\Phi''(w)(h,h) + \int_0^1 (1-t)\big(\Phi''(a+th) - \Phi''(a)\big)(h,h)\,dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\alpha\|h\|^2 - \int_0^1 (1-t)\frac{\alpha}{2}\|h\|^2 = \frac{1}{4}\alpha\|h\|^2 \qquad \blacksquare$$

Odvození věty o střední hodnotě:

$$g(a+h) = g(a) + \int_0^1 g'(a+\tau h)h\,d\tau =$$

$$= g(a) + \int_0^1 \Big\{ g'(a)h + \int_0^\tau g''(a+th)(h,h)\,dt \Big\}\,d\tau =$$

$$= g(a) + g'(a)h + \int_0^1 \Big(\int_0^\tau g''(a+th)(h,h)\,dt \Big)\,d\tau =$$

$$= g(a) + g'(a)h + \int_0^1 \Big(\int_t^1 g''(a+th)(h,h)\,d\tau \Big)\,dt$$

$$= g(a) + g'(a)h + \int_0^1 (1-t)\,g''(a+th)(h,h)\,dt$$

Věta (Lagrangeova nutná podmínka) Má-li $\Phi : X \to \mathbb{R}$ v w lokální minimum a existuje $\Phi''(w)(h,h)$, pak nutně

$$\Phi''(w)(h,h) \geq 0.$$

Příklad Uvažujme $\Phi : W_0^{1,2}(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(u) = \int_a^b \left(u'(x)^2 - \frac{u^2(x)}{1+u^2(x)} \right) dx.$$

Vysvětlete, jaké má Φ vlastnosti (koercitivní, slabě zdola sekvenciálně spojitý, diferencovatelný, konvexní.)

Podle předchozího příkladu je Φ koercitivní a slabě zdola sekvenciálně polospojitý ve $W_0^{1,2}(a,b)$.

$$\Phi'(u)h = \int_a^b \left\{ 2u'(x)h'(x) - \frac{2u(1+u^2) - u^2(2u)}{(1+u^2)^2} h(x) \right\} dx$$

$$= \int_a^b \left\{ 2u'(x)h'(x) - \frac{2u}{(1+u^2)^2} h(x) \right\} dx$$

nechť $A(x)$ je prim. funkce k $\frac{2u}{(1+u^2)^2}$, pak je

$$2u'(x) + A(x) = \text{konst}$$

Tedy u^* má druhou derivaci a platí

$$2u''(x) + \frac{2u}{(1+u^2)^2} = 0$$

$$\Phi''(u)(h,h) = \int_a^b \left\{ 2h'(x)h'(x) - \frac{2 - 6u^2}{(1+u^2)^3} h^2(x) \right\} dx$$

$$\Phi''(0)(h,h) = \int_a^b \left\{ 2(h'(x))^2 - 2h^2(x) \right\} dx$$

Pro $b-a$ malé je
$$\int_a^b h'^2(x)\,dx \geq \int h^2(x)\,dx,$$
a proto je Φ konvexní a $u \equiv 0$ je globální minimizér. V opačném případě není Φ konvexní a 0 není lokální minimizér.

začátek 6. přednášky

EULEROVA ROVNICE A REGULARITA MINIMIZÉRŮ

Uvažujme funkcionály
$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u, u'(x))\,dx$$
na množinách
$$\mathcal{A}_C = \{u \in C^1[a,b],\ u(a) = A,\ u(b) = B\}$$
$$\mathcal{A}_p = \{u \in W^{1,p}(a,b),\ u(a) = A,\ u(b) = B\}$$
pro $p \geq 1$. Prvky $W^{1,p}(a,b)$ jsou absolutně spojité funkce, ty mají derivaci skoro všude v (a,b), ~~a platí~~ ta je v $L^p(a,b)$. Pro absolutně spojité funkce platí
$$u(x) = u(a) + \int_0^x u'(t)\,dt.$$
Vzhledem k tomu, že $-\infty < a < b < \infty$ a Hölderově nerovnosti platí
$$\mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q \quad \text{pro } 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$
Písmenem $\mathcal{A}$ budeme označovat jednu

z množin $\mathcal{A}_{C_1}$, $\mathcal{A}_p$. Funkci $\underline{u}$ budeme označovat jako lokální (globální) minimizér funkcionálu Φ na množině $\mathcal{A}$, jestliže Φ nabývá v $\underline{u}$ lokálního (globálního) minima vzhledem k $\mathcal{A}$. Funkci $\underline{u}$ budeme označovat jako extremálu funkcionálu Φ na $\mathcal{A}$, jestliže $\Phi'(u)h = 0$ pro všechna h z příslušného prostoru $C_0^1(a,b)$ nebo $W_0^{1,p}(a,b)$.

Věta o existenci globálního minima

Nechť $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a existuje spojitá $\frac{\partial f}{\partial s}$ (derivace podle 3. proměnné), nechť $f(x, u, \cdot)$ je ~~spojitá~~ konvexní a nechť platí

$$f(x,u,s) \geq C_0 |s|^p - \varphi(x)$$

pro nějaké $p > 1$ a $\varphi \in L^1(a,b)$. Pak existuje globální minimum funkcionálu Φ na $\mathcal{A}_1$ $(\subseteq W^{1,1}(a,b))$.

Důkaz provedeme v několika krocích

(1) Φ je sekvencionálně slabě zdola polospojitý funkcionál na $W^{1,1}(a,b)$.

Chceme dk, že $u_k \rightharpoonup u$ ve $W^{1,1}(a,b)$ impli-kuje

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(u_k) \geq \Phi(u).$$

Nechť $u_k \rightharpoonup u$ ve $W^{1,1}(a,b)$. Pak pro $x\in[a,b]$

$$|u_k(x) - u(x)| \leq |u_k(a) - u(a)| + \left| \int_a^x \left(u_k'(x) - u'(x)\right) dx \right|$$

$$\leq \|u_k - u\|_{W^{1,1}(a,b)}$$

Proto u_k konverguje k u stejnoměrně na $[a,b]$, $u_k \rightrightarrows u$.

Uvažujme $M_k = \{x\in[a,b],\ |u'(x)| \geq k\}$.
Pak $\lim_{k\to\infty} |M_k| = 0$, kde $|M_k|$ je Lebesgueova míra množiny M_k. Na $[a,b]\setminus M_k$ platí

$$f(x, u_k(x), u'(x)) \rightrightarrows f(x, u(x), u'(x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, u_k(x), u'(x)) \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), u'(x))$$

Proto (lze předpokládat, že $f \geq 0$, pokud ne bereme $f_\infty = f + \varphi$) platí

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(u_k) = \liminf \int_a^b f(x, u_k(x), u_k'(x))\, dx$$

$$\underset{\substack{\text{neboť}\\ f\geq 0}}{\geq} \liminf_{k\to\infty} \int_{[a,b]\setminus M_k} f(x, u_k(x), u_k'(x))\, dx \geq$$

$$\geq \liminf_{k\to\infty} \left\{ \int_{[a,b]-M_K} f(x, u_k, u')\,dx + \int_{[a,b]-M_K} \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_k, u')\,(u_k' - u')\,dx \right\}$$

konvexivita v s

$$= \int_{[a,b]-M_K} f(x, u, u')\,dx$$

neboť $f(x, u_k, u') \rightrightarrows f(x, u, u')$ na $[a,b]-M_K$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, u_k, u_k') \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_k, u') \text{ na } [a,b]-M_K$$

a $\int_a^b |u_k' - u'|\,dx \to 0$

Odtud $\liminf_{k\to\infty} \Phi(u_k) \geq \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx = \Phi(u)$.

(2) Φ je slabě zdola sekvenciálně polospojitý $W^{1,p}(a,b)$, $p > 0$. Nechť $u_k \rightharpoonup u$ ve $W^{1,p}$, ~~…~~ g je spojitý lin. funkcionál na $W^{1,1}$

$$|g(u)| \leq C\|u\|_{W^{1,1}} \leq d\,\|u\|_{W^{1,p}}$$

Tedy g je spoj. lin. funkcionál na $W^{1,p}$. $g(u_k - u) \to 0$ pro $k \to \infty$, a tedy proto $u_k \rightharpoonup u$ ve $W^{1,1}(a,b)$. Odtud

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(u_k) \geq \Phi(u).$$

(3) Φ nabývá svého minima na $\mathcal{M}_p$. Φ je na $W^{1,p}$ (viz výsledek v předpokladech) koercitivní a slabě sekvenciálně zdola polospojitý na $W^{1,p}$. Proto nabývá svého minima na $\mathcal{M}_p$.
$W^{1,p}$ je reflexivní pro $p > 1$!

(4) Minimum funkcionálu Φ na $W^{1,p}$ je současně minimem funkcionálu Φ na $W^{1,1}$. Je-li $u \in W^{1,1}(a,b)$ a $\Phi(u) < \infty$, pak

$$\infty > \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \geq \int_a^b c\,|u'(x)|^p\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

a tedy $u \in W^{1,p}(a,b)$.

Slabý a silný minimizér

Nechť $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}_C, \mathcal{A}_p,\ p \geq 1\}$

Řekneme, že $u \in \mathcal{A}$ je slabý lokální minimizér funkcionálu Φ na $\mathcal{A}$, jestliže existuje $\varepsilon > 0$, že pro všechna $v \in \mathcal{A}$ splňující podmínku

$$\sup_{x \in [a,b]} |u(x) - v(x)| + \operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} |u'(x) - v'(x)| < \varepsilon$$

platí $\quad \Phi(u) \leq \Phi(v)$.

u je silný lokální minimizér funkcionálu Φ na $\mathcal{A}$, jestliže existuje $\varepsilon > 0$, že

$$\Phi(u) \leq \Phi(v)$$

pro všechna $v \in \mathcal{A}$ splňující $\sup_{[a,b]} |u(x) - v(x)| < \varepsilon$

$u \in \mathcal{A}_p$ je lokální minimizér Φ na $\mathcal{A}_p$, jestliže

$$\Phi(u) \leq \Phi(v)$$

pro všechna $v \in \mathcal{A}$ splňující $\|u - v\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$.

Platí

- silný lokální minimizér v $\mathcal{A}$ je slabý lokální minimizér v $\mathcal{A}$
- Silný lokální minimizér v $\mathcal{A}_p$ je lokální minimizér v $\mathcal{A}_p$
- Lokální minimizér v $\mathcal{A}_p$, je slabý lokální min. v $\mathcal{A}_p$.