6. PŘEDNÁŠKA

Věta (regularita extremál z $W^{1,p}$)

Nechť $f(x,u,s)$ je spojitá v x a spojitě diferencovatelná v u a s. Předpokládejme, že existuje spojitá $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$. Je-li $u_0 \in W^{1,p}[a,b]$ extremála splňující $\Phi'(u_0)h = 0$ pro všechna $h \in W_0^{1,p}(a,b)$ a $\frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x), -)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ pro každé $x \in [a,b]$, a $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x, u_0(x), s) > 0$ pro každé x a s, pak $u_0 \in C^1[a,b]$.

Důkaz: u_0 splňuje

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x), u_0'(x))\, h(x) + \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x), u_0'(x))\, h'(x) \right\} dx = 0$$

Pro

$$H(x) = \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x), u'(x_0)) - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial u}(\xi, u_0(\xi), u_0'(\xi))\, d\xi$$

platí

$$\int_a^b H(x)\, h'(x)\, dx = 0,$$

tedy podle du Bois-Reymondovy věty

$$H(x) = C \quad \text{s.v.}$$

Pro $x \in [a,b]$ a $s \in \mathbb{R}$ položme

$$F(x,s) := \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x), s) - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial u}(\xi, u_0(\xi), u_0'(\xi))\, d\xi - C$$

Funkce F je spojitá v ~~x~~ a spojitě diferencovatelná v s. Dále

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x, u_0(x), s) > 0.$$

Protože $F(x,\cdot)$ je rostoucí a podle předpokladu $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, existuje pro každé $x \in [a,b]$ jediné s tak, že $F(x,s) = 0$ (podle věty o implicitní funkci) značme funkce $s\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Protože $F(x, u_0'(x)) = H(x) - C \equiv 0$ s.v., musí být rovněž $u_0'(x) = s(x)$ s.v.

Proto $u_0(x) = A + \int_a^x s(t)\,dt$. Protože je s spojitá, je $u_0'(x) = s(x)$ všude a tedy $u_0'\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá.

<u>Příklad</u> Nechť $g \in C^1(\mathbb{R})$ a u_0 je extremála funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b \left((u')^2 + g(u)\right) dx$ ve $W^{1,2}(a,b)$.

Pak $u_0 \in C^1[a,b]$.

<u>Věta (regularita C^1-minimizera)</u>

Nechť f je třídy $C^{0,1}$ (tj. spojitá v x a spojitě diferencovatelná v u a s). Nechť u_0 je extremála funkcionálu $\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx$. Jestliže pro $x_0 \in (a,b)$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \neq 0$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že $u_0 \in C^2(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in [a,b]$, je $u_0 \in C^2[a,b]$. Je-li f třídy C^k pak $u_0 \in C^k[a,b]$.

<u>Důkaz</u>: Uvažujme opět

$$F(x,s) = f_s(x, u_0(x), s) - \int_a^x f_u(x, u_0(x), u_0'(x))\,du - C$$

Víme již, že

$$F(x, u_0(x)) = 0.$$

Z věty o implicitní funkci

$$F(x,s) = 0$$

má na okolí $(x_0, u_0'(x))$ jediné řešení $s = s(x)$ a navíc $s \in C^1(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Protože $s(x) = u_0'(x)$, je $u_0 \in C^2(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Označme $f^0(x) = f(x, u_0(x), u_0'(x))$ a předpokládejme $f^0_{ss} \neq 0$ v $[a,b]$. Derivováním v Eulerově rovnici

$$f_u^0 - \frac{d}{dx}\left(f_s^0\right) = f_u^0 - f_{sx}^0 - f_{su}^0 u_0' - f_{ss}^0 u_0'' = 0 \text{ v } (a,b)$$

Proto v (a,b)

$$u_0'' = \frac{1}{f_{ss}^0}\left[f_u^0 - f_{sx}^0 - f_{su}^0 u_0'\right]$$

Protože pravá strana je spojitá v $[a,b]$ je u_0'' spojitá v $[a,b]$. ∎

Začátek 7. přednášky

Věta (Druhá Euler-Lagrangeova rovnice)

Nechť $f \in C^1$ a $u_0 \in C^2$ je extremála. Potom funkce $f^0 - u_0' f_s^0$ je třídy C^1 a u_0 splňuje tzv. druhou Eulerovu-Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dx}\left(f^0 - u_0' f_s^0\right) = f_x^0 .$$

<u>Důkaz:</u> Z Eulerovy rovnice $\frac{d}{dx} f_s^0 = f_u^0$ plyne, že funkce v x

$$f^0 - u_0' f_s^0$$

je hladká (~~po~~ již víme $u_0 \in C^2$). Proto

$$\frac{d}{dx}\left(f^0 - u_0' f_s^0\right) = f_x^0 + f_u^0 u_0' + f_s^0 u_0''$$

$$- u_0'' f_s^0 - u_0' \frac{d}{dx} f_s^0 = f_x^0$$