7. PŘEDNÁŠKA

Další nutné podmínky pro extrém

Věta (Legendrova nutná podmínka)

Nechť $f(x,u,s)$ je třídy C^2 a u_0 je extremála třídy C^1. Je-li u_0 slabý lokální minimizér $\Phi(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$ v $\mathcal{U}_c$, pak platí

$$f_{ss}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$$

pro všechna $x \in [a,b]$.

Důkaz: Nerovnost $f_{ss}(x,u_0(x),u_0'(x)) \geq 0$ stačí dokázat pro $x \in (a,b)$. Pro $x = a, b$ plyne ze spojitosti f^0_{ss}. Je-li u_0 slabý minimizér, musí platit

$$\Phi''(u_0)(h,h) \geq 0$$

pro všechna $h \in C_0^1[a,b]$. Přitom

$$\Phi''(u_0)(h,h) = \int_a^b \left(f^0_{ss}\, h'^2(x) + 2 f^0_{us}\, h h' + f^0_{uu}\, h^2(x) \right) dx$$

Definujme $\psi : W_0^{1,2}(a,b) \to \mathbb{R}$

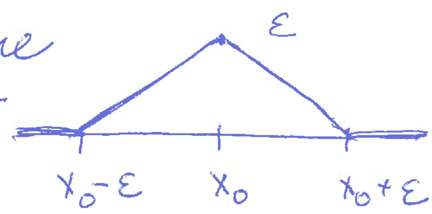
$$\psi(h) = \int_a^b \left(f^0_{ss}\, h'^2(x) + 2 f^0_{us}\, h(x) h'(x) + f^0_{uu}\, h^2(x) \right) dx$$

Protože $C_0^1[a,b]$ je hustá ve $W_0^{1,2}(a,b)$, je

$$\psi(h) \geq 0 \quad \text{pro všechna } h \in W_0^{1,2}(a,b)$$

Nechť $x_0 \in (a,b)$ je pevné. Zvolme

$$h_\varepsilon(x) = (\varepsilon - |x - x_0|)^+$$



Dokážeme, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\psi(\varepsilon)}{2\varepsilon} = f^{\circ}_{ss}(x_0),$$

odkud plyne, že $f^{\circ}_{ss}(x_0) \geq 0$.

$$\int_a^b f^{\circ}_{uu} \frac{h^2_{\varepsilon}(x)}{2\varepsilon}\,dx \leq \varepsilon \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f^{\circ}_{uu}(x)|\,dx \to 0 \text{ pro } \varepsilon \to 0$$

$$\int_a^b 2 f^{\circ}_{us} \frac{h(x)\,h'(x)}{2\varepsilon}\,dx \leq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f^{\circ}_{us}(x)|\,dx \to 0 \text{ pro } \varepsilon \to 0$$

$$\int_a^b f^{\circ}_{ss} \frac{h'^2(x)}{3\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^{\circ}_{ss}(x)\,dx \longrightarrow f^{\circ}_{ss}(x_0)$$

■

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda funkcionál

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1} (u')^2 (u' - x)\,dx$$

má na množině $\{u \in C^1[-1,1]\ \ u(-1) = u(1) = 0\}$ slabé lokální minimum.

<u>Řešení</u> Eulerova rovnice je

$$\frac{d}{dx}\left(3u'^2 - 2u' \cdot x\right) = 0$$

$$u'(3u' - 2x) = c$$

Kdyby $c \neq 0$, pak by u' neměnilo znaménko a nemohla by být $u(-1) = u(1) = 0$. Tedy $c = 0$ a dostáváme dvě řešení $u_1(x) = 0$ a $u_2(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$.

Žádné z těchto řešení nevyhovuje nutné Legendrově podmínce, neboť

$$f_{ss}(x,u,s) = \frac{\partial}{\partial s}(3s^2 - 2sx) = $$
$$= 6s - 2x$$

$$f^0_{ss}(x,0,0) = -2x$$

$$f^0_{ss}\left(x, \frac{x^2-1}{3}, \frac{2x}{3}\right) = \frac{12x}{3} - 2x = 2x$$

Tedy funkcionál Φ nemá slabé lokální minimizéry.

<u>Poznámka</u> Pro $u : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ dostaneme nezápornost hlavních minorů matice $(f_{s_i s_j})$.

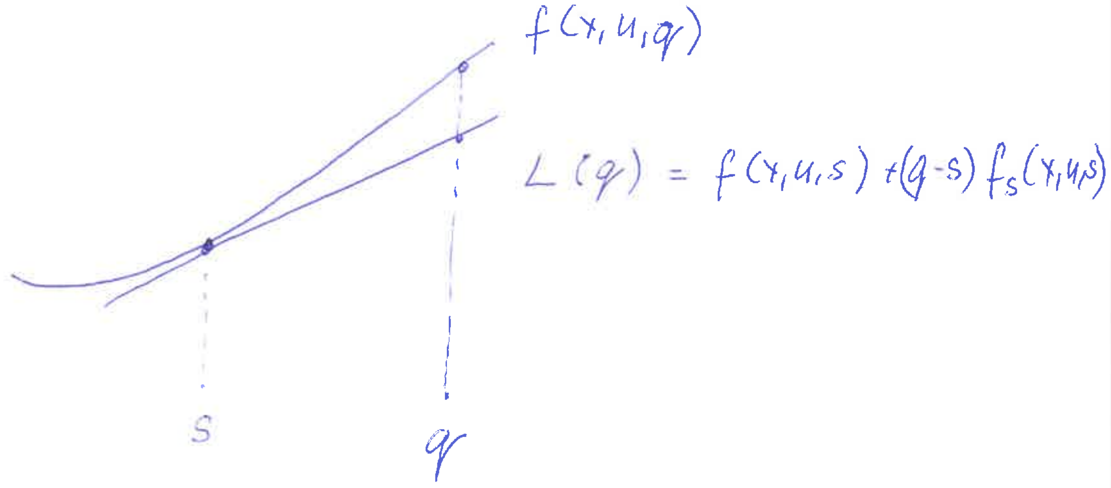
<u>Weierstrassova nutná podmínka</u>

Podmínka $f^0_{ss} \geq 0$ znamená, že funkce $f(x_0, u_0(x), s)$ proměnné s je konvexní v bodě $s = u_0'(x)$. Proto se ji pokusíme zformalizovat jinak.

<u>Weierstrassova funkce</u> E pro $x \in [a,b]$, $u, s, q \in \mathbb{R}$ je

$$E(x,u,s,q) = f(x,u,q) - f(x,u,s) - (q-s)\, f_s(x,u,s)$$

Pro pevné $\underline{x}$ a $\underline{u}$



Věta (Weierstrassova nutná podmínka)

Nechť f je třídy C^1. Je-li u_0 slabý lokální minimizér Φ v $\mathcal{A}_c$, pak existuje $\delta>0$ tak, že $E(x, u_0(x), u_0'(x), q) \geq 0$ pro všechna $x \in [a,b]$ a $q \in [u_0'(x)-\delta, u_0'(x)+\delta]$.

Je-li u_0 silný lokální minimizér Φ v $\mathcal{A}_c$, pak

$$E(x, u_0(x), u_0'(x), q) \geq 0$$

pro všechna $x \in [a,b]$ a $q \in \mathbb{R}$.

Důkaz Podobně jako předchozí větu, stačí i tuto dokázat pro $x \in (a,b)$. Je-li u_0 slabý (resp. silný) minimizér Φ, potom existuje $\delta>0$ tak, že

$$\Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) - \Phi'(u_0)h \geq 0$$

pro každé $\varphi \in C_0^1[a,b]$ s C^1-normou menší než δ.

Definujme pro $h \in W^{1,\infty}(a,b)$

$$\begin{aligned}\psi(h) &= \Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) - \Phi'(u_0)h \\ &= \int_a^b \big[f(x, u_0+h, u_0'+h') - f^0(x) - f_u^0(x)h(x) \\ &\qquad - f_s^0(x)h'(x)\big]\,dx\end{aligned}$$

Z hustoty $C_0^1[a,b]$ ve $W_0^{1,\infty}(a,b)$ plyne

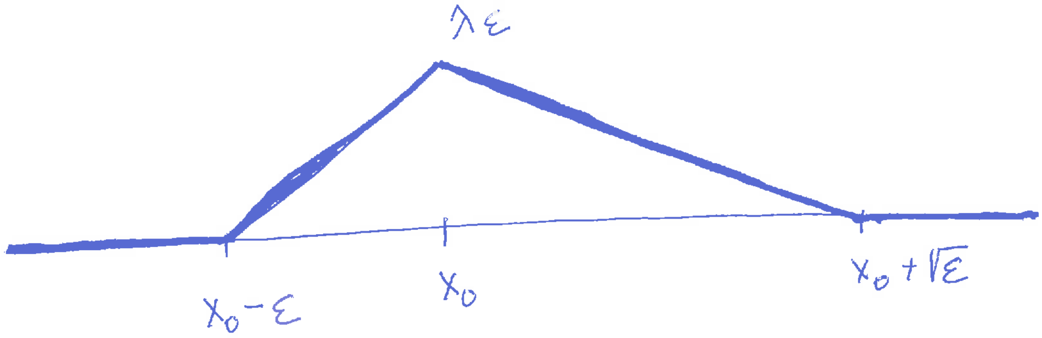
$$\psi(h) \geq 0$$

pro $\|h\|_{W_0^{1,\infty}} \leq \delta$.

Zvolme $x_0 \in (a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon>0$ malé

$$\varepsilon < \min(1, x_0-a, (b-x_0)^2).$$

$$h_{\varepsilon,\lambda}(x) := \begin{cases} \lambda(x+\varepsilon-x_0) & \text{pro } x\in[x_0-\varepsilon, x_0] \\ \lambda\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}-x+x_0) & \text{pro } x\in[x_0, x_0+\sqrt{\varepsilon}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Pro pevné ε můžeme shlazením $h_{\varepsilon,\lambda}$ v okolí $x_0-\varepsilon$, x_0 a $x_0+\sqrt{\varepsilon}$ najít funkce $\varphi_n \in C_0^1$ takové, že $\varphi_n \to h_{\varepsilon,\lambda}$ ve $W^{1,1}(a,b)$ a $\|\varphi_n'\|_C \le |\lambda|$, $\|\varphi_n\|_C \le \lambda\varepsilon$.

Je-li u_0 slabý lokální minimizér, potom pro $|\lambda| < \delta$ dokážeme

$$\psi(\varphi_n) \ge 0$$

a limitním přechodem $n\to\infty$

$$\psi(h_{\varepsilon,\lambda}) \ge 0.$$

Vydělíme nerovnost ε a provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0_+$. Dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\psi(h_{\varepsilon,\lambda})}{\varepsilon} = f(x_0, u_0(x_0), u_0'(x_0)+\lambda) - f(x_0,u_0(x_0),u_0'(x_0))$$
$$- \lambda f_s(x_0, u_0(x_0), u_0'(x_0)) \ge 0.$$

Výraz $\frac{\Psi(h_{\varepsilon,\lambda})}{\varepsilon}$ se nám rozdělí na dva integrály $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}}$

První konverguje k požadovanému výrazu, druhý k nule – v něm při úpravě použijeme větu o střední hodnotě.

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x, u_0(x)+h_{\varepsilon,\lambda}(x), u_0'+\lambda)\,dx \longrightarrow f(x_0, u_0(x_0), u_0'(x_0)+\lambda)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x, u_0(x), u_0'(x))\,dx \longrightarrow f(x_0, u_0(x), u_0'(x_0))$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f_u(x, u_0(x), u_0'(x))\, h_{\varepsilon,\lambda}\,dx\right| \le \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f_u(x, u_0(x), u_0'(x))\,\varepsilon\lambda\,dx\right|$$

$$\le \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} |f_u(x, u_0(x), u_0'(x))|\,\lambda\,dx \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f_s(x, u_0(x), u_0'(x))\, h'_{\varepsilon,\lambda}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f_s(x, u_0(x), u_0'(x))\,\lambda\,dx$$

$$\longrightarrow f_s(x_0, u_0(x), u_0'(x))\,\lambda$$

Teď se budeme zabývat výrazem $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}} \dots\dots$, kde na $f(x, u_0+h_{\varepsilon,\lambda}, u_0'+h'_{\varepsilon,\lambda}) - f(x, u_0, u_0')$ použijeme větu o střední hodnotě

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}}\Big(\int_0^1 [f_u(x, u_0+th_{\varepsilon,\lambda}, u_0'+th'_{\varepsilon,\lambda})\,h_{\varepsilon,\lambda} + f_s(x, u_0+th_{\varepsilon,\lambda}, u_0'+th'_{\varepsilon,\lambda})\,h'_{\varepsilon,\lambda}]\,dt$$

$$- f_u(x, u_0, u_0')\,h_{\varepsilon,\lambda} - f_s(x, u_0, u_0')\,h'_{\varepsilon,\lambda}\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \left(f_u(x, u_0 + t h_{\varepsilon,\lambda}, u_0' + t h'_{\varepsilon,\lambda}) - f_u(x, u_0, u_0')\right) dt \, h_{\varepsilon,\lambda} \, dx$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \left(f_s(x, u_0 + t h_{\varepsilon}, u_0' + t h'_{\varepsilon,\lambda}) - f_s(x, u_0, u_0')\right) dt \, h'_{\varepsilon,\lambda} \, dx$$

První výraz konverguje k 0, neboť $|h_{\varepsilon,\lambda}| \leq \varepsilon \lambda$ a integrand $f_u(x, u_0 + t h_{\varepsilon,\lambda}, u_0' + t h'_{\varepsilon,\lambda}) - f_u(x, u_0, u_0')$ je omezený.

Druhý výraz: $|h'_{\varepsilon,\lambda}| \leq \sqrt{\varepsilon}\, \lambda$ a pro pevné λ lze zvolit ε dostatečně malé, aby

$$\int_0^1 \left(f_s(x, u_0 + t h_{\varepsilon}, u_0' + t h'_{\varepsilon,\lambda}) - f_s(x, u_0, u_0')\right) dt$$

byl předepsaně malý. Tedy limita druhého výrazu je rovněž 0. ■

<u>Příklad</u> Uvažujme $\Phi(u) = \int_0^1 (u'^2 + u'^3)\, dx$, $u(0) = u(1) = 0$. Eulerova rovnice je

$$\frac{d}{dx}\left(2u' + 3u'^2\right) = 0 \Rightarrow u'(2 + 3u') = C$$

nutně $C = 0$, $u_0(x) = 0$ je jediná extremála. Protože $f_{ss}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 2$, platí

$$\Phi''(u_0)(h,h) = 2(h')^2$$

a tedy $u_0(x) \equiv 0$ je slabý lokální minimizér.

Weierstrassova funkce je

$$E(x, 0, 0, q) = q^2 + q^3 - q \cdot 0 = q^2 + q^3 \geq 0$$

pro $|q|$ malá, nikoliv pro všechna q.

Tedy $u_0(x) \equiv 0$ není silný lokální extrém.

<u>Příklad</u> Uvažujme funkcionál

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 (u')^2 + x (u')^3\right) dx$$

s okrajovými podmínkami $u(-1) = u(1) = 0$.

Eulerova rovnice je

$$x u' (2x + 3u') = C$$

Volbou $x = 0$, dostaneme $C = 0$ a extremály

$u_0(x) = 0$ a $u_1(x) = \frac{1 - x^2}{3}$. Platí

$$f_{ss}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0$$

$$f_{ss}(x, u_1(x), u_1'(x)) \leq 0$$

takže je splněna Legendrova nutná podmínka pro u_0, aby byl slabým minimizérem, a pro u_1, aby byl slabým maximizérem.

Dále platí

$$E(x, u_0(x), u_0'(x), q) = x q^2 (x + q)$$

Pro každé x existuje $\delta(x) > 0$ takže

$$E(x, u_0(x), u_0'(x), q) \geq 0$$

pro $|q - u_0'(x)| < \delta(x)$, ale δ se nedá zvolit rovnoměrně. Není splněna Weierstrassova nutná podmínka $\Rightarrow u_0$ není slabý lokální minimizér.

Analogicky:

$$E(x, u_1(x), u_1'(x), q) = x^2q^2 + xq^3 - 4x^4/27$$

Takže ani u_1 není slabý lokální maximizér.