# DOPLNĚK K 8. PŘEDNÁŠCE

Na straně 59 se dokazovalo: je-li $\lambda_1(y)=0$, je $y$ konjugovaný bod. Provedeme tento důkaz detailněji.

Protože funkce $g(h) = \int_a^y Q h^2 dx$ je $\overbrace{\text{sekvenciálně}}^{\text{slabě}}$ spojitá na $W_0^{1,2}(a,y)$ a tento prostor je reflexivní, nabývá svého minima v jednotkové kouli $B_y$. Nechť

$$\lambda_1(y) = 1 + \inf_{h \in S_y} g(h) = 0.$$

Tedy $\inf\limits_{h \in S_y} g(h) = -1$. Funkce $g$ nabývá infima na $B_y$ a to musí být $\leq -1$.

Tohoto infima nabývá ve funkci $h_y \in B_y$.

Protože $g$ je kvadratická, musí $h_y \in S_y$.

Navíc $h_y$ je globální minimizér funkcionálu

$$\psi(h) = \|h\|_y^2 + g(h) \quad \text{na } W_0^{1,2}(a,y).$$

Kdyby $\psi(\bar{h}) < 0$ pro nějaké $\bar{h} \in W_0^{1,2}(a,y)$, pak by rovněž $\inf\limits_{h \in S_y} \psi(h) < 0$ (vzali bychom vhodný násobek $\bar{h}$, který leží na sféře $S_y$.)

Protože $\inf\limits_{h \in S_y} \psi(h) = \lambda_1(y) = 0$, je $h_y \in S_y$ globálním minimizérem pro $\psi$ na celém $W_0^{1,2}$.

Tedy pro $h_y$ platí Eulerova rovnice pro funkcionál $\Psi$ a to je Jacobiho rovnice pro funkcionál $\Phi$. Tedy $h_y$ je řešení Jacobiho rovnice s okrajovými podmínkami $h_y(a) = h_y(y) = 0$. Z věty o regularitě minimizérů plyne, že $h_y \in C^2[a,y]$. Tedy $y$ je konjugovaný bod k $a$.

Zbývající část důkazu začíná na posledním řádku strany 59 a je již v pořádku.