8. PŘEDNÁŠKA

Aplikace Legendrova a Weirstrassova kriteria

Minimální rotační plocha

$$\Phi(u) = \int_a^b u(x)\sqrt{1+u'^2(x)}\,dx$$

Druhá derivace podle s lagrangiánu f je

$$f_{ss}(x,u,s) = \frac{u}{(1+s^2)^{3/2}} > 0$$

pro $u>0$. Tedy obě vypočtené extremály jsou potenciální minimizéry podle Legendrova kriteria.

Weierstrassova E funkce pro daný lagrangián je

$$E(x,u,s,q) = u\left[\sqrt{1+q^2} - \sqrt{1+s^2} - (q-s)\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right] \geq 0$$

pro u kladné a něčtna q. Tedy obě extremály jsou potenciální silné lokální minimizéry.

Geodetiky na sféře

$$\Phi(u) = \int_a^b \sqrt{1+\sin^2 x\, u'(x)^2}\,dx$$

Druhá derivace podle s lagrangiánu f je

$$f_{ss}(x,u,s) = \frac{\sin^2 x}{(1+\sin^2 x\, s^2)^{3/2}} \geq 0$$

Konstantní funkce je potenciální minimum. Obdobně ~~[illegible]~~ Weierstrassova E funkce je

$$E(x,u,q,s) = \sqrt{1+\sin^2 x\, q^2} - \sqrt{1+\sin^2 x\, s^2} - (q-s)\frac{\sin^2 x\, s}{(1+\sin^2 x\, s)^{1/2}} \geq 0$$

pro všechna x. Jde tedy o potenciální silnější minimizér.

KONJUGOVANÉ BODY a JACOBIHO NUTNÁ PODMÍNKA

Nechť Lagrangian $f(x,u,s)$ je třídy C^3 a extremála u_0 třídy C^2.

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

Platí

$$\Phi''(u_0)(h,h) = \int_a^b \left(f^0_{ss} h'^2 + 2 f^0_{us} h h' + f^0_{uu} h^2\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(f^0_{ss} h'^2 + f^0_{uu} h^2 - \left(\frac{d}{dx} f^0_{us}\right) h^2\right) dx$$

Definujme pro $h \in W_0^{1,2}(a,b)$

$$\psi(h) = \int_a^b \left(P(x) h'^2(x) + Q(x) h^2(x)\right) dx,$$

kde
$$P(x) = f^0_{ss}(x)$$
$$Q(x) = f^0_{uu}(x) - \frac{d}{dx}\left(f^0_{us}(x)\right)$$

Předpokládejme $P(x) > 0$ na $[a,b]$, tj: existuje $p_0 > 0$, že $P(x) \geq p_0 > 0$ na $[a,b]$.

Eulerova rovnice pro funkcionál $\psi(h)$ se nazývá Jacobiho rovnice pro Φ a funkci u_0

$$-\frac{d}{dx}\left[P(x) h'\right] + Q(x) h = 0.$$

Jestliže má tato rovnice netriviální řešení h na intervalu $[a, y]$, $y \leq b$, takové, že
$$h(a) = h(y) = 0,$$
nazývá se y konjugovaný bod (k a).

Příklad Je-li $f(x, u, s) = \varphi(x) s^2 + \psi(x) s u + \eta(x) u^2$, kde $\varphi, \psi, \eta \in C^1$, pak Eulerova rovnice pro Φ a jakoukoliv extremálu je stejná jako Jacobiho rovnice, neboť
$$\Phi''(u)(h, h) = \Psi(h) \quad \text{pro každé } u \in C^1.$$

Věta Funkcionál Ψ je pozitivně definitní (resp. pozitivně semidefinitní) na $W_0^{1,2}(a, b)$ právě když v $(a, b]$ (resp. v (a, b)) neexistuje konjugovaný bod.

Jacobiho nutná podmínka
Je-li f třídy C^3, $u_0 \in C^1[a, b]$ a $f_{ss}^{\circ}(x) > 0$ pro $x \in [a, b]$ a u_0 je slabý lokální minimizér v $\mathcal{V}_c$, pak v (a, b) neexistuje konjugovaný bod.

Důkaz JNP. Je-li f třídy C^3, je u_0 třídy C^3. Podle předpokladu je $\Phi''(u_0)(h, h) = \Psi(h)$ pozitivně semidefinitní. Věta říká, že v (a, b) není konj. bod.

Začátek 9. přednášky
$\Downarrow$

Označení: Prostor $X_y = W_0^{1,2}(a,y)$ se skalárním součinem
$$(u,v)_y := \int_a^y P(x)\,u'v'\,dx$$
ekvivalentním se stand. skal. součinem.

Pro $y < z \leq b$ lze zadat inkluse
$$X_y \subsetneqq X_z \subsetneqq W_0^{1,2}(a,b)$$
(Každou $h \in W_0^{1,2}(a,y)$ prodloužíme na interval $[a,z]$ nulou na intervalu $[y,z]$.)

Nechť S_y je jednotková sféra prostoru X_y.

Definujme
$$\lambda_1(y) = 1 + \inf_{h \in S_y} \int_a^y Q(x) h^2\,dx = \inf_{h \in S_y} \int_a^y \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right)dx$$
$$= \inf_{h \in X_y} \psi(h) = \inf_{h \in X_y \setminus \{0\}} R_y(h),$$
kde $R_y(h) : X_y \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longmapsto \dfrac{\psi(h)}{\|h\|_y^2}$.

Funkcionál $g : W_0^{1,2}(a,y) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$g(h) = \int_a^y Q h^2\,dx$$
je slabě sekvenciálně spojitý. Protože $W_0^{1,2}(a,y)$ je reflexivní, nabývá g na jednotkové sféře S_y svého minima.

Věta o pozitivní definitnosti ψ plyne z následujícího lemmatu:

LEMMA • Funkce $\lambda_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, spojitá a $\lim_{y \to a_+} \lambda_1(y) = 1$.

- Je-li $\lambda_1(y) = 0$, pak y je konjugovaný bod a $\lambda_1(z) < 0$ pro $z > y$.
- Je-li $y \in (a, b]$ konjugovaný bod, pak $\lambda_1(y) \leq 0$.
- Pro $h \in W_0^{1,2}(a, b)$ platí
$$\psi(h) \geq \lambda_1(b) \, \|h\|_b^2 .$$
- Je-li $\lambda_1(b) < 0$, potom existuje $h \in W_0^{1,2}(a,b)$ tak, že $\psi(h) < 0$.

Důkaz

- Protože $S_y \subset S_z$ pro $y < z$, je monotónie zřejmá z definice.

Spojitost λ_1 v y zleva. Nechť $\varepsilon > 0$, existuje $h_y \in S_y$, že
$$\psi(h_y) < \lambda_1(y) + \varepsilon$$
Funkce $h^\delta(x) = h_y(xy/(y-\delta))$ pro $\delta \in (0, y-a)$ leží v $X_{y-\delta}$ a platí
$$\lambda_1(y-\delta) \leq R_{y-\delta}(h^\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} R_y(h_y) = \psi(h_y) < \lambda_1(y) + \varepsilon$$

Spojitost λ_1 v y zprava. Použijeme Poincarého nerovnost $\int_a^b h^2 \, dx \leq (a-b)^2 \int_a^b h'^2(x) \, dx$ pro $h \in W_0^{1,2}$

ale až na něco jiného.

Nechť $y \in (a,b)$, $\varepsilon > 0$ a $\delta \in (0, b-y)$.

Existuje $h_{y+\delta} \in S_{y+\delta}$, že

$$\lambda_1(y+\delta) + \varepsilon > \psi(h_{y+\delta}) = R_{y+\delta}(h_{y+\delta})$$

Pro funkci

$$h^\delta(x) = h_{y+\delta}\left(\frac{x(y+\delta)}{y}\right) \in S_y$$

platí

$$R_{y+\delta}(h_{y+\delta}) - R_y(h^\delta) \longrightarrow 0$$

pro $\delta \to 0$, tedy z $\lambda_1(y) \leq R_y(h^\delta)$
a monotónie λ_1 plyne $\lambda_1(y+\delta) \longrightarrow \lambda_1(y)$.

$\underline{\lambda_1(y) \longrightarrow 1 \text{ pro } y \to a_+}$ Pomocí Poincarého

nerovnosti máme pro $h \in S_y$

$$\left|\int_a^y Q(x) h^2 \, dx\right| \leq \|Q\|_{C^0} \int_a^y h^2(x)\, dx \leq$$

$$\leq \|Q\|_{C^0} (y-a)^2 \int_a^y (h')^2(x)\, dx \leq \|Q\|_{C^0} (y-a)^2 K \int_a^y P(x) h'^2 dx$$

$$= \|Q\|_{C^0} (y-a)^2 K \longrightarrow 0 \text{ pro } y \to a_+.$$

- Nechť $\lambda_1(y) = 0$, nechť h_y je příslušný minimizér ψ na S_y. Protože ψ je kvadratický a $\psi(h_y) = 0$, je h_y globální minimizér. h_y splňuje Eulerovu rovnici, ta je totožná s Jacobiho rovnicí. Tedy h_y splňuje i okrajové podmínky $h_y(a) = h_y(y) = 0$. Tedy y je konjugovaný s bodem a.

  Nechť $z > y$. Kdyby $\lambda_1(z) = 0$, pak

h_y dodefinovaná 0 by byl globální minimizér Ψ na S_z, dalš třídy C^2 na $[a,z]$. Protože $h_y(x) = 0$ pro $x \geq y$, je $h_y'(y) = 0$. Z jednoznačnosti plyne $h_y \equiv 0$ na $[a,z]$, spor. Tedy nutně $\lambda_1(z) < 0$.

- Je-li $y \in (a,b]$ konjugovaný bod a nechť h je příslušné netriviální řešení Jacobiho rovnice s okr. podmínkami $h(a) = h(y) = 0$.

Potom

$$\Psi(h) = \int_a^y (Ph'^2 + Qh^2)\,dx =$$

$$= \int_a^y \left[-\frac{d}{dx} Ph' + Qh\right] h\,dx = 0$$

Takže $\lambda_1(y) \leq \dfrac{\Psi(h)}{\|h\|_y^2} = 0.$ ▨