9. PŘEDNÁŠKA

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY PRO EXTRÉM

Věta: Nechť f je třídy C^3, $u_0 \in C^1[a,b]$ je extremála funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx\,, \quad u(a)=A,\ u(b)=B.$$

Jestliže na $(a,b]$ neexistuje konjugovaný bod, pak u_0 je slabý lokální minimizér.

Důkaz: Z věty o regularitě C^1-extremál plyne, že $u_0 \in C^3$. Podle věty z předchozí přednášky je

$$\Phi''(u_0)(h,h) = \Psi(h)$$

pozitivně definitní na $W_0^{1,2}(a,b)$. Tj.

$$\Phi''(u_0)(h,h) \geq \alpha \, \|h\|_{1,2}^2$$

pro všechna $h \in W_0^{1,2}$. Dále

$$\Phi''(u_1)(h,h) = \int (f_{ss}^1 h'^2 + f_{su}^1 h'h + f_{uu}^1 h^2)\,dx$$

kde $f_{ss}^1(x) = f_{ss}(x, u_1(x), u_1'(x))$ je pro u_1 blízké k u_0 v normě C^1 směr

$$\Phi''(u_1)(h,h) \text{ blízké } \Phi''(u_0)(h,h).$$

Tedy pro u_1 v nějakém C^1-okolí funkce u_0 je

$$\Phi''(u_1)(h,h) \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|_{1,2}^2$$

Z věty o střední hodnotě, máme

$$\Phi(u_1) - \Phi(u_0) - \Phi'(u_0)(u_1-u_0) = \int_0^1 (1-t)\, \Phi''(u_0 + t(u_1-u_0))\,dt\,(u_1-u_0, u_1-u_0)$$

$$\geq \frac{\alpha}{2} \|u_1 - u_0\|_{1,2} \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{\alpha}{4} \|u_1 - u_0\|_{1,2}$$

Tedy u_0 je slabý lokální minimizér. $\blacksquare$

Příklady

(1) $\Phi(u) = \int_0^b \left((u')^2 - u^2 \right) dx \qquad u(0) = 0,\ u(b) = \sin b$

$b \in (0, 2\pi)$.

Eulerova rovnice je $\quad u'' + u = 0$.

Pro $b \neq \pi$ dostáváme jedinou extremálu

$$u_0 = \sin x.$$

Pro $b = \pi$ jsou extremály $\quad k \sin x$.

Jacobiho rovnice je opět $\quad u'' + u = 0$.

Pro $b > \pi$ v $(0, b)$ existuje konjugovaný bod π. Podle Jacobiho nutné podmínky, není u_0 lokální minimizér.

Nicméně Legendreova a Weierstrassova nutná podmínka je splněna, neboť

$f_{ss} > 0 \quad$ a $\quad E(x, u, q, s) = q^2 - s^2 - (q - s) 2s > 0$.

Pro $b \leq \pi$ neexistuje konjugované body v $(0, b)$.

je splněna Jacobiho nutná podmínka.

Pro $b < \pi$ neexistuje konjugovaný bod v $(0, b]$.

Podle předchozí věty je $u_0(x) = \sin x$ lokální slabý minimizér. (Pro $b = \pi$ je každé $k \sin x$ lokální slabý (neostrý) minimizér.

② Za DÚ: najděte extremálu variační úlohy

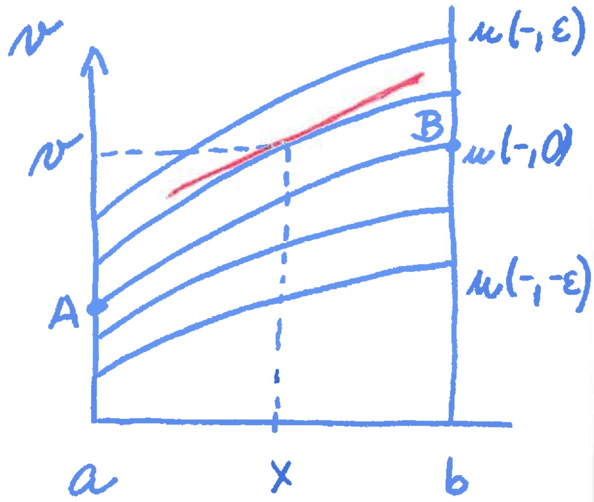
$$\Phi(u) = \int_0^{\pi/4} \left((u')^2 - 4u^2 - 8u\right) dx$$

$$u(0) = -1, \quad u(\pi/4) = 0.$$

Aplikujte na ni podmínku s konjugovanými body a zjistěte, zda jde o minimizér. Co říká Legendrova a Weierstrassova nutná podmínka?

POLE EXTREMÁL

Nechť $u_0 \in C^2[a,b]$, $u_0(a) = A$, $u_0(b) = B$ je extremála funkcionálu Φ a $\varepsilon > 0$. Zobrazení



$$w : [a,b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

$$(x, \alpha) \longmapsto u(x, \alpha)$$

se nazývá <u>pole extremál</u> pro u_0, jestliže $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ i u jsou třídy C^1, $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ a pro každé $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ platí

(1) $w(-,\alpha)$ je extremála, $u(-,0) = u_0$.

(2) $\frac{\partial w}{\partial \alpha}(-,\alpha) \in C^2[a,b]$

Je-li w pole extremál, potom pro každé $(x,v) \in P = \{(x, w(x,\alpha)) \in [a,b] \times \mathbb{R},\ \alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$

existuje jediné $\alpha = \alpha(x,v) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ takové, že $v = u(x,\alpha)$. (Plyne z věty o implicitní funkci, neboť $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$.)

Funkce $\psi : P \to \mathbb{R}$, $(x,v) \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, \alpha(x,v))$ se nazývá sklon ~~extremálního~~ pole extremál. (Na obrázku jsou to směrnice červeně namalované tečny.)

začátek 10. přednášky

Lemma Je-li $f \in C^3$, $f_{ss}^0 > 0$ a existuje pole extremál $u(x,\alpha)$, pak je

$$w(x) = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x,0)$$

kladné řešení Jacobiho rovnice pro extremálu u_0, takže v intervalu $(a,b]$ neexistuje konjugovaný bod.

Důkaz: Pro α si napíšeme Eulerovy rovnice

$$-\frac{d}{dx} f_s^\alpha + f_u^\alpha = 0.$$

Derivováním podle α dostaneme

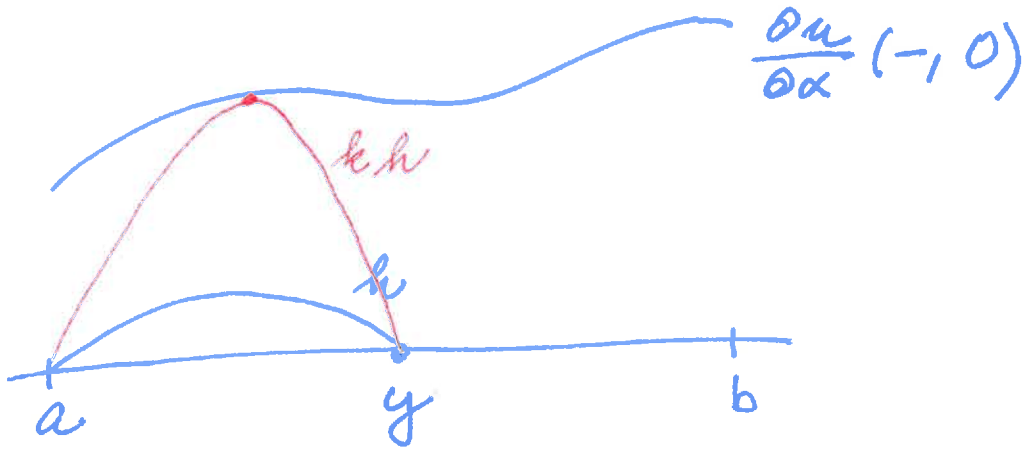
$$-\frac{d}{dx}\left(f_{ss}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} u\right)'\right) - \frac{d}{dx}\left(f_{su}^\alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) + f_{su}^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}$$
$$+ f_{uu}^\alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$$

Rozepsáním 2. členu nám dva členy „vypadnou", dostaneme pro $\alpha = 0$

$$-\frac{d}{dx}\left(f_{ss}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)'\right) - \frac{d}{dx}\left(f_{su}^0\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + f_{uu}^0 \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,$$

což je Jacobiho rovnice pro $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\cdot,0)$.

Protože $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\cdot,0) > 0$ jde o kladné řešení Jacobiho rovnice na intervalu $[a,b]$. Kdyby existovalo řešení Jacobiho rovnice h takové, že $h(a) = h(y) = 0$ pro $y \in (a,b]$, pak by se vhodný násobek funkce h dotknul zespoda funkce $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\cdot,0)$, což by byl ve sporu s jednoznačností řešení počáteční úlohy pro Jacobiho rovnici.



Proto Jacobiho rovnice nemá v intervalu $[a\ b]$ konjugovaný bod. ■

<u>TVRZENÍ</u>: Je-li f libovolný C^4, $u_0 \in C^2[a,b]$ je extremála funkcionálu Φ, $f_{ss}^0 > 0$ v $[a,b]$ a v intervalu $(a,b]$ neexistuje konjugovaný bod, pak existuje pole extremál pro u_0.

<u>Důkaz</u> nebudeme provádět.

Nyní odvodíme postačující podmínku pro silný extrém.

Hilbertův invariantní integrál

Pro funkci $v \in C^1[a,b]$, jejíž graf leží v poli extremál

$$P = \{(x, u(x,\alpha)) \in [a,b] \times \mathbb{R},\ \alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$$

definujeme tento integrál takto:

$$I(v) = \int_a^b [f(x, v(x), \psi(x, v(x)) + (v'(x) - \psi(x, v(x))) \cdot f_s(x, v(x), \psi(x, v(x))] dx$$

Lemma Nechť $f \in C^2$. Hilbertův integrál nezávisí na cestě, tj.

$$I(v_1) = I(v_2)$$

pro libovolné $v_1, v_2 \in C^2([a,b])$, jejichž grafy leží v P a $v_1(a) = v_2(a)$, $v_1(b) = v_2(b)$.

Důkaz: Derivováním definiční identity

$$u_x(x, \alpha) = \psi(x, u(x, \alpha))$$

podle x dostaneme

$$u_{xx} = \psi_x + \psi_v u_x = \psi_x + \psi_v \psi$$

Dosazením do Eulerovy rovnice

$$f_{ss} u_{xx} + f_{su} u_x + f_{sx} - f_u = 0$$

dostaneme

$$(*) \quad f_{ss}(\psi_x + \psi_v \psi) + f_{su}\psi + f_{sx} - f_u = 0$$

Pro $(x,v) \in P$ označme

$$M_1(x,v) := f(x,v,\psi(x,v)) - f_s(x,v,\psi(x,v)) \cdot \psi(x,v)$$

$$M_2(x,v) := f_s(x,v,\psi(x,v))$$

Z rovnosti $(*)$ plyne

$$\frac{\partial M_1}{\partial v} = \frac{\partial M_2}{\partial x}$$

neboť

$$\frac{\partial M_1}{\partial v} = f_u + f_s\psi_v - (f_{su} + f_{ss}\psi_v)\psi$$

$$- f_s\psi_v = + f_u - f_{su}\psi - f_{ss}\psi_v\psi =$$

$$= f_{ss}\psi_x + f_{sx}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} = f_{sx} + f_{ss}\psi_x$$

Tedy na jednoduše souvislé oblasti P existuje $S \in C^2(P)$ tak, že

$$S_x = M_1, \quad S_v = M_2.$$

Pro $v \in C^1([a,b])$, jejíž graf leží v P pak dostáváme

$$I(v) = \int_a^b (M_1 + M_2 v')\,dx = \int_a^b (S_x + S_v v')\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx} S(x, v(x))\, dx = S(b, v(b)) - S(a, v(a)).$$

<u>Věta</u> (Postačující podmínka pro silný extrém)

Nechť f je třídy C^2 a $u_0 \in C^2[a,b]$, $u(a)=A$, $u(b)=B$ je extremála funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x,u,u')\, dx.$$

Jestliže existuje pole extremál pro u_0 a

$$(\heartsuit) \qquad E(x, v, \psi(x,v), s) \geq 0$$

pro každé $(x,v,s) \in P \times \mathbb{R}$, potom je u_0 silný lokální minimizér funkcionálu Φ v $\mathcal{M}_C$. Podmínka $(\heartsuit)$ je například splněna, jestliže

$$f_{ss}(x,v,s) \geq 0 \text{ na } P \times \mathbb{R}.$$

<u>Důkaz:</u> Nechť graf $u \in \mathcal{M}_C$ leží v poli extremál P. Potom platí

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) = \Phi(u) - \Phi(u_0) = \Phi(u) - I(u_0) = \Phi(u) - I(u) =$$
$$= \int_a^b E(x, u(x), \psi(x,u(x)), u'(x))\, dx \geq 0. \quad \blacksquare$$

Splnění $(\heartsuit)$ – viz konvexita v s.