11. PŘEDNÁŠKA

<u>Opakování</u> Hledáme minimum funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u, u'(x))\,dx$$

mezi funkcemi s okrajovou podmínkou

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Nutná podmínka, aby bylo minimum existovalo (za jistých předpokladů na diferencovatelnost f) je splnění

<u>Eulerovy rovnice</u>

$$f_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} f_s(x, u, u') = 0.$$

Řešení Eulerovy rovnice nazýváme extremálami.

Druhá derivace Φ v extremále u_0 je dána kvadratickým funkcionálem

$$\Psi(h) = \int_a^b f^0_{ss}(h')^2 + \left(f^0_{uu} - \frac{d}{dx} f^0_{us}\right) h^2.$$

Eulerova rovnice pro tento funkcionál se nazývá <u>Jacobiho rovnice</u>.

<u>Jacobiho nutná podmínka</u> pro minimum – ~~[illegible]~~ v intervalu (a, b) nemá Jacobiho rovnice <u>konjugovaný bod</u> a $f^0_{ss}(x) > 0$.

<u>Pole extremál $u(x, \alpha)$</u>

Extremály funkcionálu Φ, diferencovatelné v x i α, $\frac{\partial}{\partial\alpha} u(x,\alpha) \in C^2[a,b]$ a $\frac{\partial}{\partial\alpha} u(x,\alpha) > 0$.

Pro $v = u(x,\alpha)$ definujeme

$$\psi(x,v) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,\alpha).$$

Postačující podmínka pro silný extrém je

$$E(x,v,\psi(x,v),s) \geq 0$$

pro každé $(x,v,s) \in P \times \mathbb{R}$, kde

$$E(x,v,\psi(x,v),s) = f(x,v,s) - f(x,v,\psi(x,v)) - f_s(x,v,s)\cdot(s-\psi(x,v)).$$

K tomu stačí

$$f_{ss}(x,v,s) \geq 0 \quad \text{v } P \times \mathbb{R}.$$

Aplikace předchozího na úlohu o minimální rotační ploše

Funkcionál $\Phi(u) = \int_{-1}^{1} u(x)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$

s okrajovými podmínkami

$$u(-1) = u(1) = A.$$

Ve 4. přednášce jsme si ukázali, že extremály splňují

$$u = \alpha\sqrt{1+u'^2}$$

a jsou

$$u(x,\alpha) = \alpha \cosh \frac{x}{\alpha}.$$

Aby extremála nabývala v 1 a -1 hodnoty A, musí platit

$$\alpha \cosh \frac{1}{\alpha} = A .$$

Funkce $g(\alpha) = \alpha \cosh \frac{1}{\alpha}$ je ryze konvexní (druhá derivace je kladná), $\lim_{\alpha \to \pm\infty} g(\alpha) = \infty$.

Proto má jediné minimum v bodě α_0, kde $g'(\alpha_0) = 0$, což znamená

$$\alpha_0 \operatorname{tgh} \frac{1}{\alpha} = 1 .$$

Položme $A_0 = \alpha_0 \cosh \frac{1}{\alpha_0}$

Extremály tedy mohou nabývat jen okrajových podmínek $A \geq A_0$.

(1) Nechť $A > A_0$. Pak existují

$$\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$$

takové, že $u(x, \alpha_1)$ a $u(x, \alpha_2)$ jsou extremály splňující

$$u(1, \alpha_i) = u(-1, \alpha_i) = A .$$

Ukážeme, že v tomto případě je

$u(x, \alpha_2)$

silný minimizér, zatímco

$u(x, \alpha_1)$

není minimizér ani maximizér.

Pro $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$ je $\frac{\partial}{\partial \alpha} u(x,\alpha) > 0$

s výjimkou $\frac{\partial}{\partial \alpha}(\pm 1, \alpha_0) = 0$. To nám

dává pole extremál

$$P = \{(x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R},\ v \geq u(x,\alpha_0)\} \setminus \{(\pm 1, A_0)\}$$

Dále na $P \times \mathbb{R}$ platí

$$f_{ss}(x,v,s) \geq 0$$

neboť $f(x,v,s) = v\sqrt{1+s^2}$

$$f_{ss}(x,v,s) = v \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} > 0.$$

Tedy $u(x,\alpha_2)$ je silný minimizér mezi všemi funkcemi v s vlastností

$$v(x) \geq u(x,\alpha_0).$$

Pro $\alpha \in (0, \alpha_0)$ je $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\pm 1, \alpha) < 0$

neboť

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} u(\pm 1, \alpha) = g'(\alpha) < 0 \quad \text{pro } \alpha < \alpha_0.$$

Současně $\frac{\partial}{\partial \alpha} u(0,\alpha) > 0$. Tedy funkce

$$w(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} u(x,\alpha_1)$$

je netriviální řešení Jacobiho rovnice, které v intervalu $[-1,1]$ mění znaménko.

Proto má Jacobiho rovnice konjugovaný bod v intervalu $[-1,1]$, ~~nesplňuje~~ tedy $u(x,\alpha_1)$ není lokální minimizér (ani maximizér neboť $f_{ss}^{0}(x) \geq 0$.)

② Případ $A=A_0$. Máme jedinou extremálu splňující okrajové podmínky

$$u_0(x)=u(x,\alpha_0).$$

Pro $w(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} u(x,\alpha_0)$ platí

$$w(-1) = w(1) = 0 \quad \text{a} \quad w(x)>0 \text{ na } (-1,1).$$

Tedy w je netriviální řešení Jacobiho rovnice, které má konj. bod v 1.
Lze ukázat dokonce, že

$$\Phi''(u_0)(w,w) = 0$$

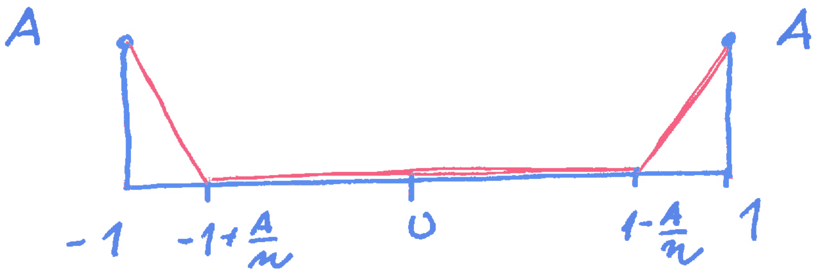
Přímým výpočtem lze ukázat

$$\Phi'''(u_0)(w,w,w) > 0,$$

z čehož plyne, že u_0 není extrémem funkcionálu Φ. ($\Phi(u_0+tw)$ je v $t=0$ rostoucí)

③ Lze ukázat více: Pro $A > A_0$ dostatečně velké, je $u(x,\alpha_2)$ globálním minimizérem v $\mathcal{A}_c^+ = \{u \in \mathcal{A}_c \,;\, u(x)>0\}$, ale pro $A > A_0$ blízké A_0 extremála $u(x, \alpha_2)$ není globálním minimizérem v $\mathcal{A}_C^+$.

Vezmeme-li funkce $u_n(x)$, je



$$\lim_{n \to \infty} \Phi(u_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{A^2}{n} \sqrt{1+n^2} = A^2$$

zatímco pro A blízké A_0 je

$$\Phi(u(x, \alpha_2)) > A^2 .$$

Funkce $u_n(x)$ lze aproximovat funkcemi z $\mathcal{A}_C^+$.

Je-li $A \gg A_0$. Jestliže $u \in \mathcal{A}_C^+$ a $u(x) \geq A_0$ pro všechna $x \in [-1, 1]$, leží graf u v poli extremál a je $\Phi(u) > \Phi(u(\cdot, \alpha_2))$.

Pro funkci $u \in \mathcal{A}_C^+$ s vlastností $\min u < A_0$ existují $-1 < x_1 < x_2 < 1$ tak, že $u(x_1) = u(x_2) = A_0$ takže

$$\Phi(u) \geq \int_{-1}^{x_1} u \sqrt{1+u'^2} + \int_{x_2}^{1} u \sqrt{1+u'^2}$$

$$\geq \int_{-1}^{x_1} -u u' \, dx + \int_{x_2}^{1} u u' \, dx = -\left[\tfrac{1}{2} u^2\right]_{-1}^{x_1} + \left[\tfrac{1}{2} u^2\right]_{x_2}^{1}$$

$$= A^2 - A_0^2 > 2A \geq \Phi(u(\cdot, \alpha_2)).$$

Úloha s volným koncem

Hledáme extrémy funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx$$

na množině $\{ u \in C^1([a,b]);\ u(a) = A \}$,
f spojitá v x a diferencovatelná v u a s.
Podobně jako v úloze s pevně danou hodnotou $u(b) = B$, zjistíme, že z

$$0 = \Phi'(u)\,h = \int_a^b \{ f_u(x, u(x), u'(x))\, h(x) + f_s(x, u(x), u'(x))\, h'(x) \}\,dx$$

pro $h \in C^1[a,b]$, $h(a) = h(b) = 0$ plyne
Eulerova rovnice

$$f_u(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} f_s(x, u(x), u'(x)) = 0.$$

Nicméně $\Phi'(u)h = 0$ rovněž i pro funkce $h \in C^1[a,b]$ s okrajovou podmínkou pouze $h(a) = 0$. Pak použijeme per partes a odvozené Eulerovy rovnice dostaneme

$$0 = \Phi'(u)h = \int_a^b \left\{ f_u\, h(x) - \frac{d}{dx} f_s\, h(x) \right\} dx + f_s(b, u(b), u'(b)) \cdot h(b)$$

Tedy $f_s(b, u(b), u'(b)) = 0$.

Tato podmínka často vede k podmínce

$$u'(b) = 0 \quad \text{(Neumannova okrajová podmínka)}$$

Příklad Brachistochrona s volným koncem

$$\Phi(u) = \int_0^b \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{u(x)}}$$

$u(0)=0$. Podmínka na druhý okraj pro

$$f(x,u,s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{u}}$$

je

$$f_s(b,u(b),u'(b)) = \frac{s}{\sqrt{u}\sqrt{1+s^2}} = 0,$$

což pro $u(b)>0$ dává $u'(b)=0$.

Je-li $f \in C^3$, $u_0 \in C^2$ extremála, $f_s(b,u_0(b),u_0'(b))=0$, $f_{ss}(x,u_0(x),u_0'(x))>0$ definujeme funkce P, Q a funkcionál Ψ stejně jako v předchozím.

Pak platí

$$\Phi''(u_0)(h,h) = \Psi(h) + f_{us}(b,u_0(b),u_0'(b))\,h^2(b)$$

pro každé $h \in C^1[a,b]$, $h(a)=0$.

~~Opakováním úvah kolem Jacobiho nulové a postačující podmínky: $y \in [a,b)$ je konjugovaný, existuje-li netriviální řešení Jacobiho rovnice na $[y,b]$ s okrajovými podmínkami $h(y)=0$, $h'(b)=0$.~~

~~Je-li $c_b = f^0_{us}(b) \neq 0$, musíme uvažovat funkcionál~~

$$\cancel{\tilde{\Psi}(h) = \int_a^b [P(h')^2 + Qh^2]\,dx + c_b\,h^2(b)}$$

Musíme proto uvažovat funkcionál

$$\tilde{\Psi}(h) = \int_a^b [P(h')^2 + Qh^2]\,dx + f^0_{us}(b)\,h^2(b) =$$

$$= \int_a^b [P(h')^2 + Qh^2 + f^0_{us}(b)\,2hh']\,dx$$

Eulerova rovnice pro tento funkcionál je původní Jacobiho rovnice. Okrajové podmínky jsou

$$h(a) = 0, \quad Ph'(b) + f^0_{us}(b)\,h(b) = 0$$

Bod $y \in [a,b]$ je konjugovaný, jestliže existuje netriviální řešení takové, že

$$h(y) = 0, \quad Ph'(b) + f^0_{us}(b)\,h(b) = 0$$

Pro pole extremál musíme v úlohách s volným koncem požadovat

$$f_s(b, u(b,\alpha), u'(b,\alpha)) = 0$$

pro všechna α.

Potom Jacobiho postačující a nutná podmínka pro existenci minimizéru (slabého) a postačující podmínka pro existenci silného minimizéru platí tu v analogickém znění.

Příklad Hledáme minimizéry funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_0^1 [(u')^2 - 2\beta u u']\,dx, \quad \beta \neq 0$$

na množině $B = \{u \in C^1[0,1];\ u(0) = 0\}$. Druhá okrajová podmínka je $u'(1) - \beta u(1) = 0$.

Extremály v B jsou $u_0(x) \equiv 0$ pro všechna B a $u_1(x) = Cx$ pro $B = 1$. Pro $u_0 \equiv 0$ dostáváme $P \equiv 2$, $Q \equiv 0$, $c_b = \overset{\circ}{f_{us}} = -2B$ Jacobiho rovnice je

$$h'' = 0$$

Konjugovaný bod

$$h(y) = 0 \quad 2h'(1) - 2Bh(1) = 0$$

Řešení Jacobiho rovnice s $h(y) = 0$ jsou

$$h(x) = C(x-y)$$

$y \in (0,1]$ je konjugovaný pouze pro $B > 1$

$$2C - 2BC(1-y) = 0$$

$$B = \frac{1}{1-y}$$

Pro $B < 1$ je u_0 slabý lokální minimizér.
Pro $B < 1$ máme pole extremál

$$u(x,\alpha) = \alpha\left(\frac{B}{1-B}x + 1\right)$$

a $f_{ss} = 2 > 0$, $f_s(u(b,\alpha), u'(b,\alpha)) = 0$.
Takže u_0 je rovněž silný a globální ~~extrém~~ minimizér.