12. PŘEDNÁŠKA

Vázané extrémy

Nechť X je Banachův prostor, $\Phi, \Psi_i : X \to \mathbb{R}$ funkcionály třídy C^1. Hledáme extrém funkcionálu Φ na množině

$$M := \{ x \in X,\ \Psi_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \dots n \}$$

Věta o Lagrangeových multiplikátorech

Nechť $w \in M$ a $\Psi_i'(w)$ jsou lineárně nezávislé. Jestliže Φ nabývá v x svého extrému vzhledem k množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ taková, že

$$\Phi'(w) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi_i'(w) = 0.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s tím, že

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \Psi_i'(w) \subseteq \ker \Phi'(w)$$

což znamená, že $\Phi'(w)$ se nuluje ve směru tečných vektorů k varietě M. Tečný prostor k M ve w je právě $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \Psi_i'(w)$.

Postačující podmínka pro existenci minima je, že kvadratická forma F, která vznikne modifikací kvadratické formy

$\Phi''(w)$ je pozitivně definitní na tečném prostoru v M, tj. $F''(w)(h,h) \geq \lambda \|h\|^2$ pro $\lambda > 0$ a $h \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker \psi_i'(w)$.

<u>Příklad</u> Najděte minimizér funkcionálu

$$\Phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx$$

na množině $M = \{u \in W_0^{1,2}(0,1);\ \int_0^1 (u')^2 dx = 1\}$.

Najdeme první ~~kritic~~ extremálu pomocí Lagrangeových multiplikátorů

$$0 = [\Phi'(u) - \lambda \psi'(u)](h) =$$

$$\int_0^1 x\, h(x)\, dx - 2\lambda \int_0^1 u'(x) h'(x)\, dx =$$

$$\int_0^1 (x + 2\lambda u''(x))\, h(x)\, dx$$

Tedy
$$2\lambda u''(x) = -x$$
$$u(0) = u(1) = 0$$
$$u(x) = a(x^3 - x)$$

$$1 = \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \int_0^1 a^2 (3x^2-1)^2 dx = a^2 \int_0^1 (9x^4 - 6x^2 + 1)\, dx =$$
$$= a^2 \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{6}{3}x^3 + x\right]_0^1 = a^2\left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right) = a^2 \frac{4}{5}$$

$a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad u_1(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}(x^3 - x)$ by měla dával minimum, $\quad u_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - x^3)$ by měla dával maximum.

Funkcionál $\Phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx$ je slabě spojitý na $W_0^{1,2}(0,1)$, $B = \{u \in W_0^{1,2}(0,1), \int_0^1 (u')^2 dx \leq 1\}$ je slabě sekvenciálně kompaktní

Tedy Φ nabývá na B svého minima a maxima a to ve funkcích, kde

$$\int_0^1 (u')^2 = 1.$$

Tedy nalezené extrémy jsou minimum a maximum vzhledem k množině M.

LEGENDROVA TRANSFORMACE

funkce $f : I \to \mathbb{R}$, která je ryze konvexní, je funkce $f^* : I^* \to \mathbb{R}$ definovaná

$$f^*(p) = \sup_{x \in I} (px - f(x)).$$

Je-li f diferencovatelná a $f'' > 0$, nabývá funkce $px - f(x)$ svého suprema právě v bodě, kde $\frac{d}{dx}(px - f(x)) = 0$.

Tedy $p = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ a

$$f^*(p) = p\,(f')^{-1}(p) - f((f')^{-1})(p)$$

$$\frac{d}{dp} f^*(p) = x + p\,\frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dp} =$$

$$= x + \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dp} = x$$

$$\frac{df}{dx}(x) = p$$

Odtud plyne, že f' a $(f^*)'$ jsou navzájem inverzní funkce.

Navíc, Legendrova transformace je involutorní, tj. $(f^*)^* = f$, neboť

$$f^{**}(x) = x\,(f^{*\prime})^{-1}(x) - f^* \circ (f^{*\prime})^{-1}(x) =$$

$$= xp - f^*(p) = xp - (xp - f(x)) = f(x)$$

Tuto transformaci použijeme pro tzv. Hamiltonův formalismus.

HAMILTONŮV FORMALISMUS

- používá se ve fyzice. Místo n Eulerových rovnic druhého stupně pro n neznámých dostaneme $2n$ rovnic prvého stupně pro $2n$ neznámých funkcí.

Ukážeme nejdříve pro jednu funkci. Nechť $L(t,q,\dot q)$ je Lagrangián, položíme

$$p = \frac{\partial}{\partial \dot q} L(t,q,\dot q)$$

jestliže $\frac{\partial^2}{\partial \dot q^2} L(t,q,\dot q) \neq 0$, můžeme $\dot q$ spočítat jako funkci t, q, p.

$$\dot q = \xi(t,q,p).$$

Hamiltonián je nyní Legendrovou transformací Lagrangiánu $L(t,q,\dot q)$ vzhledem k proměnné $\dot q$.

$$H(t,q,p) = p\dot q - L(t,q,\xi(t,q,p))$$
$$= p\,\xi(t,q,p) - L(t,q,\xi(t,q,p))$$

Platí:

$$\frac{\partial H}{\partial q}(t,q,p) = p\frac{\partial \xi}{\partial q}(t,q,p) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \xi}{\partial q}$$
$$= -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}$$ podle Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p) = \xi(t,q,p) - p\frac{\partial \xi}{\partial p}(t,q,p) - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial p}$$
$$= \xi(t,q,p) = \dot q$$

Tedy místo Eulerovy rovnice pro neznámou funkci q

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

máme Hamiltonovy rovnice pro neznámé funkce q a p:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(t, q, p)$$

<u>Příklad - harmonický oscilátor</u>

q poloha hmotného bodu, m jeho hmotnost, k tuhost pružiny

Kinetická energie

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

Potenciální energie

$$V(x) = \frac{1}{2} k q^2 .$$

Lagrangián nezávisí na čase

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q)$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{q})^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

Eulerova rovnice je

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$m\ddot{q} = -kq$$

Hamiltonián je pro $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q$

$$H(q,p) = p\,\dot q(p) - L(q, \dot q(p)) =$$

$$= \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{kq^2}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{kin. energie}} + \underbrace{\frac{kq^2}{2}}_{\text{potenc. energie}}$$

Hamiltonovy rovnice pak

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$$

Navíc platí

$$\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\cdot \dot q + \frac{\partial H}{\partial p}\dot p = 0$$

Tedy $H(q(t), p(t)) = \text{konst.}$

Tato skutečnost říká, že součet kinetické a potenciální energie je konstantní.

HAMILTONŮV FORMALISMUS
pro více funkcí

Lagrangián $L(t, q_1, \dots q_n, \dot q_1, \dots \dot q_n)$

Položíme $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(t, q_j, \dot q_j)$

Za předpokladu, že

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(t, q_j, \dot{q}_j)$$

má nenulový determinant, můžeme lokálně spočítat $\dot{q}_i$ pomocí t, q_j a p_j:

$$\dot{q}_i = \xi_i(t, q_j, p_j)$$

Hamiltonián bude

$$H(t, q_j, p_j) = \sum_{i=1}^{n} p_j \cdot \xi_j(t, q_j, p_j) - L(t, q_j, \xi_j(t, q, p))$$

Platí

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \xi_i(t, q_j, p_j) - \sum_{i=1}^{n} p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} - \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} =$$

$$= \xi_i(t, q_j, p_j) = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i$$

Dále platí

$$\frac{d}{dt} H(t, q_j, p_j) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t} +$$

$$\sum_i \cancel{\ } \dot p_i \dot q_i + \sum \dot q_i \dot p_i = \frac{\partial H}{\partial t}$$

jestliže H nezávisí na t, je $H(t, q(t), p(t))$ konstantní.

Lagrangián pomocí Hamiltoniánu je

$$L(t, q_j, \dot q_j) = \sum_{j=1}^{N} p_j(t, q_i, \dot q_i) \cdot \dot q_j - H(t, q_i, \cancel{\ } p_i(t, q_i, \dot q_i)).$$