Domácí úkol z 1. března 2018
(odevzdává se 8. března 2018)

Cílem této domácí úlohy je dokázat výsledek L. Skuly.

Nejprve připomeňme definici teorie divizorů oboru integrity R: nechť D je pologrupa s jednoznačným rozkladem, $R^* = R - \{0\}$. Říkáme, že homomorfismus pologrup $\delta : R^* \to D$ je teorií divizorů oboru integrity R, jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

(1) pro libovolné $\alpha, \beta \in R^*$ platí $\alpha \mid \beta$ v R, právě když $\delta(\alpha) \mid \delta(\beta)$ v D;

(2) pro libovolné $\alpha, \beta \in R^*$ a libovolné $c \in D$ splňující $c \mid \delta(\alpha)$, $c \mid \delta(\beta)$ v D platí:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad c \mid \delta(\alpha + \beta), \\ \alpha - \beta \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad c \mid \delta(\alpha - \beta); \end{aligned}$$

(3) pro libovolné $a, b \in D$ platí: jestliže

$$\{\alpha \in R^*;\, a \mid \delta(\alpha)\} = \{\beta \in R^*;\, b \mid \delta(\beta)\},$$

pak $a = b$.

A nyní konečně zadání domácí úlohy:

(i) Dokažte, že podmínka (3) je ekvivalentní s podmínkou: pro libovolné $a \in D$ existují $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^*$ takové, že a je největší společný dělitel prvků $\delta(\alpha_0), \delta(\alpha_1), \dots, \delta(\alpha_n)$;

(ii) Dokažte, že platí-li pro homomorfismus δ podmínka (3), pro libovolné $b \in D$ existují $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma \in R^*$ tak, že $b\delta(\gamma)$ je nejmenší společný násobek prvků $\delta(\beta_0), \delta(\beta_1), \dots, \delta(\beta_n)$;

(iii) Dokažte, že podmínka (2) je důsledek podmínek (1) a (3).

Částečný návod:

Při důkazu jednoho směru (i) nejprve odvoďte z podmínky (3), že pro dané $a \in D$ existuje $\alpha_0 \in R^*$ tak, že $a \mid \delta(\alpha_0)$. Pak rozložte $\delta(\alpha_0) = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$, kde $p_1, \dots, p_n$ jsou různé prvodivizory, $k_1, \dots, k_n$ přirozená čísla, a dokažte pro každé $i = 1, \dots, n$ existenci $\alpha_i \in R^*$ splňujícího $a \mid \delta(\alpha_i)$, $ap_i \nmid \delta(\alpha_i)$. Nakonec vysvětlete, proč takto zvolené prvky splňují požadované.

Při důkazu (ii) nejprve odvoďte z podmínky (3), že pro dané $b \in D$ existuje $\rho \in R^*$ a $c \in D$ tak, že $bc = \delta(\rho)$. Podle části (i) k prvku c existují $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in R^*$ takové, že c je největší společný dělitel prvků $\delta(\alpha_0), \delta(\alpha_1), \dots, \delta(\alpha_n)$. Označte $\gamma = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n$ a pro každé $i = 0, 1, \dots, n$ položte $\beta_i = \rho\gamma/\alpha_i$. Vysvětlete, proč takto zvolené prvky splňují požadované.