Domácí úkol z 8. března 2018 (odevzdává se 15. března 2018)

(i) Dokažte následující zobecnění Eisensteinova kritéria:

Nechť K je těleso, $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ valuace na K. Nechť pro polynom

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$$

je splněno $v(a_n) = 0$, $v(a_0) = 1$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-1$ platí $v(a_i) \geq 1$. Pak je polynom f ireducibilní nad tělesem K.

(ii) Dokažte, že existuje-li alespoň jedna valuace $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ na tělese K, pak pro každé přirozené číslo n existuje konečné rozšíření tělesa K stupně n.

Částečný návod:

Dokažte si následující užitečné vlastnosti každé valuace $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ *na libovolném tělese* K*:*

- $v(1) = 0$*;*
- *jsou-li* $a, b \in K$ *takové, že* $v(a) \neq v(b)$, *pak* $v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$.

Úlohu (i) můžete řešit sporem takto: jestliže polynom f *není ireducibilní nad tělesem* K, *pak existují nekonstantní polynomy* $g_1, g_2 \in K[x]$ *tak, že* $f = g_1 g_2$, *navíc lze předpokládat, že* g_1 *je normovaný polynom. Pro* $i = 1, 2$ *označme* m_i *nejmenší hodnotu valuace* v *na koeficientech polynomu* g_i, *přičemž nejmenší* j *takové, že valuace* v *nabývá minimální hodnoty* m_i *na koeficientu u* x^j, *označme* j_i. *Ukažte, že* $v(a_{j_1+j_2}) = m_1 + m_2$, $m_1 \leq 0$, $m_2 \leq 0$, *odkud odvoďte* $m_1 = m_2 = 0$, $j_1 + j_2 = n$ *a dojděte ke sporu.*