Domácí úkol z 15. března 2018
(odevzdává se 22. března 2018)

Nechť K je těleso. Protože okruh polynomů $K[x]$ je okruh s jednoznačným rozkladem, má teorii divizorů. V této teorii divizorů prvodivizory jednoznačně odpovídají normovaným ireducibilním polynomům nad K. Pro každý takový normovaný ireducibilní polynom $f \in K[x]$ označme v_f jemu odpovídající valuaci na tělese racionálních funkcí $K(x)$.

(i) Pro libovolné nenulové $\alpha \in K(x)$ existují nesoudělné polynomy $f, g \in K[x]$, $g \neq 0 \neq f$, tak, že $\alpha = \frac{f}{g}$. Dokažte, že předpisem

$$v^*(\alpha) = \operatorname{st} g - \operatorname{st} f$$

(doplněným $v^*(0) = \infty$) jsme definovali valuaci na tělese racionálních funkcí $K(x)$.

(ii) Dokažte, že každá valuace na tělese racionálních funkcí $K(x)$, pro kterou platí $v(a) = 0$ pro každé nenulové $a \in K$, je rovna valuaci v^* anebo valuaci v_f pro některý normovaný ireducibilní polynom $f \in K[x]$.

Částečný návod:

Pro část (ii) je vhodné rozlišit dva případy: jestliže pro každý polynom $g \in K[x]$ platí $v(g) \geq 0$, lze postupovat podobně jako v semináři při studiu valuací na $\mathbb{Q}$. Jestliže naopak existuje polynom $g \in K[x]$ splňující $v(g) < 0$, ukažte, že $v(x) < 0$, a odvoďte, že pro každý polynom $h \in K[x]$ platí $v(h) = (\operatorname{st} h) \cdot v(x)$. Odtud snadno dostanete, že $v = v^*$.