Domácí úkol z 12. dubna 2018
(odevzdává se 19. dubna 2018)

Na dnešní přednášce jsme studovali následující situaci:

Nechť $\mathbf{o}$ je obor integrity s teorií divizorů $\mathbf{o}^* \to \mathcal{D}_0$, označme k podílové těleso okruhu $\mathbf{o}$. Pro každý prvodivizor $p \in \mathcal{D}_0$ máme odpovídající valuaci v_p na k; označme $\mathcal{N}_0$ množinu všech těchto valuací. Obrazem prvku $a \in \mathbf{o}^*$ v této teorii divizorů je tedy

$$(a)_k = \prod_p p^{v_p(a)} \in \mathcal{D}_0,$$

kde v součinu probíhá p všechny prvodivizory z $\mathcal{D}_0$ (tento součin je konečný, protože pro skoro všechny prvodivizory z $\mathcal{D}_0$ je $v_p(a) = 0$).

Nechť dále K je konečné rozšíření tělesa k, označme $\mathcal{O}$ celý uzávěr okruhu $\mathbf{o}$ v K a $\mathcal{N}$ množinu všech prodloužení valuací z $\mathcal{N}_0$ na těleso K.

Dokázali jsme, že množina $\mathcal{N}$ indukuje teorii divizorů $\mathcal{O}^* \to \mathcal{D}$, ve které každý prvodivizor $P \in \mathcal{D}$ odpovídá právě jedné valuaci $v_P \in \mathcal{N}$. Obrazem prvku $\alpha \in \mathcal{O}^*$ v této teorii divizorů je tedy

$$(\alpha)_K = \prod_P P^{v_P(\alpha)} \in \mathcal{D},$$

kde v součinu probíhá P všechny prvodivizory z $\mathcal{D}$.

Fakt, že valuace $v_P \in \mathcal{N}$ je prodloužením valuace $v_p \in \mathcal{N}_0$ budeme zapisovat $P \mid p$ a příslušný index větvení označíme $e(P|p)$. To znamená, že pro každé $a \in k^*$ platí $v_P(a) = e(P|p) \cdot v_p(a)$.

Na dnešním semináři jsme také ukázali, že předpis

$$\iota(p) = \prod_{P|p} P^{e(P|p)}$$

pro každý prvodivizor z $p \in \mathcal{D}_0$ indukuje injektivní homomorfismus pologrup $\iota : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ takový, že komutuje diagram, ve kterém řádky jsou teorie divizorů:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^* \arrow[r] & \mathcal{D} \\ \mathbf{o}^* \arrow[r] \arrow[u, hook, "\subseteq"] & \mathcal{D}_0 \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Konečně můžeme formulovat zadání domácí úlohy: ukažte, že $\iota : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ je jediný homomorfismus pologrup, pro který komutuje takový diagram. Přesněji: je-li $j : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ homomorfismus pologrup, pro který komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^* \arrow[r] & \mathcal{D} \\ \mathbf{o}^* \arrow[r] \arrow[u, hook, "\subseteq"] & \mathcal{D}_0 \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

pak $j = \iota$.

Návod, jak lze postupovat:

Pro libovolný prvodivizor $p \in \mathcal{D}_0$ *sestrojte* $a, b \in \mathbf{o}$ *tak, aby* p *byl největší společný dělitel divizorů* $(a)_k$, $(b)_k$ *v* $\mathcal{D}_0$. *Vysvětlete, že z definice homomorfismu* ι *plyne, že pak* $\iota(p)$ *je největší společný dělitel divizorů* $(a)_K$, $(b)_K$ *v* $\mathcal{D}$. *Odvoďte odtud relaci dělitelnosti* $j(p) \mid \iota(p)$ *v* $\mathcal{D}$.

Z předpokladu $j \neq \iota$ *odvoďte existenci prvodivizoru* $p_0 \in \mathcal{D}_0$ *a prvodivizoru* $P \in \mathcal{D}$ *takových, že* $j(p_0) \cdot P \mid \iota(p_0)$ *v* $\mathcal{D}$. *Sestrojte* $a \in \mathbf{o}$ *tak, aby* $v_{p_0}(a) = 1$, *pak*

$$(a)_k = p_0 \cdot p_1^{c_1} \cdots p_r^{c_r},$$

kde $p_0, p_1, \ldots, p_r$ *jsou různé prvodivizory* $\mathcal{D}_0$, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{N}$. *Odvoďte odtud, že* $j((a)_k) \cdot P \mid \iota((a)_k)$ *v* $\mathcal{D}$, *což je ve sporu s tím, že* $\iota((a)_k) = (a)_K = j((a)_k)$.