Domácí úkol z 3. května 2018
(odevzdává se 10. května 2018)

Nechť v_0 je libovolná valuace na tělese k, označme

$$\mathbf{o} = \{\alpha \in k;\ v_0(\alpha) \geq 0\}$$

okruh této valuace a $I_0 = \{\alpha \in k;\ v_0(\alpha) > 0\}$ jediný maximální ideál tohoto okruhu, nechť $F_0 = \mathbf{o}/I_0$ je těleso zbytků valuace v_0; pro libovolné $\alpha \in \mathbf{o}$ bude $\overline{\alpha} \in F_0$ značit odpovídající zbytek.

Nechť dále K je konečné rozšíření tělesa k, označme $v_1, \ldots, v_m$ všechna prodloužení valuace v_0 na těleso K. Pro každé $s = 1, \ldots, m$ nechť je

$$\mathcal{O}_s = \{\alpha \in K;\ v_s(\alpha) \geq 0\}$$

okruh valuace v_s a $I_s = \{\alpha \in K;\ v_s(\alpha) > 0\}$ jediný maximální ideál tohoto okruhu, nechť $F_s = \mathcal{O}_s/I_s$ je těleso zbytků valuace v_s; pro libovolné $\alpha \in \mathcal{O}_s$ bude $\overline{\alpha}^{(s)} \in F_s$ značit odpovídající zbytek. Nechť e_s a f_s jsou index větvení a stupeň inercie valuace v_s vzhledem k v_0, což znamená, že pro libovolné $\alpha \in k$ platí $v_s(\alpha) = e_s \cdot v_0(\alpha)$ a po kanonickém vnoření F_0 do F_s (kdy $\overline{\alpha} \in F_0$ ztotožníme s $\overline{\alpha}^{(s)} \in F_s$ pro každé $\alpha \in \mathbf{o}$) je f_s stupeň rozšíření tělesa F_s nad tělesem F_0.

Na semináři jsme dokázali, že $\mathcal{O} = \cap_{s=1}^{m} \mathcal{O}_s$ je celý uzávěr okruhu $\mathbf{o}$ v K. Díky větě o aproximaci víme, že lze zvolit prvky $\omega_{si} \in \mathcal{O}$, kde $1 \leq s \leq m$, $1 \leq i \leq f_s$, tak, aby $\overline{\omega_{s1}}^{(s)}, \ldots, \overline{\omega_{sf_s}}^{(s)}$ tvořilo bázi tělesa F_s nad tělesem F_0 a současně aby pro každé $j \in \{1, \ldots, m\} - \{s\}$ a každé $i = 1, \ldots, f_j$ platilo $v_j(\omega_{si}) \geq e_j$.

Víme také, že $\mathcal{O}$ je okruh s jednoznačným rozkladem s ireducibilními prvky $\pi_1, \ldots, \pi_s$, které jsou určeny (až na asociovanost v $\mathcal{O}$) podmínkami

$$v_j(\pi_s) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } j = s, \\ 0, & \text{je-li } j \neq s. \end{cases}$$

V dalším textu budeme pracovat se systémem prvků

$$\omega_{si}\pi_s^j, \quad \text{kde } 1 \leq s \leq m,\ 1 \leq i \leq f_s,\ 0 \leq j < e_s, \tag{1}$$

případně s lineárními kombinacemi tohoto systému

$$\alpha = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{f_s} \sum_{j=0}^{e_s - 1} c_{sij}\omega_{si}\pi_s^j, \quad \text{kde } c_{sij} \in k. \tag{2}$$

1. Předpokládejme, že v lineární kombinaci (2) jsou všechny koeficienty $c_{sij} \in \mathbf{o}$, přičemž alespoň jeden z těchto prvků je jednotkou okruhu $\mathbf{o}$. Vysvětlete, proč v takovém případě vždy lze vybrat $s_0 \in \{1, \ldots, m\}$,

$i_0 \in \{1, \ldots, f_{s_0}\}$ a $j_0 \in \{0, \ldots, e_{s_0} - 1\}$ tak, že $v_0(c_{s_0 i_0 j_0}) = 0$ a současně pro každé $i \in \{1, \ldots, f_{s_0}\}$ a $j \in \{0, \ldots, e_{s_0} - 1\}$ platí

$$j < j_0 \quad \Longrightarrow \quad v_0(c_{s_0 ij}) > 0.$$

Ukažte, že pak platí $v_{s_0}(\alpha) = j_0$.

2. Dokažte, že systém prvků (1) je lineárně nezávislý nad tělesem k.

3. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sum_{s=1}^{m} e_s f_s \le [K : k].$$

4. Dokažte, že je-li rozšíření K tělesa k separabilní, pak systém prvků (1) tvoří fundamentální bázi okruhu $\mathcal{O}$ nad $\mathbf{o}$.

Návod, jak lze postupovat:

1. *Vzpomeňte si, jak určit hodnotu valuace součtu v případě, kdy jeden sčítanec má valuaci menší než všichni ostatní sčítanci.*

2. *Užijte výsledek z první části.*

3. *Odvoďte ze druhé části.*

4. *Využijte věty ze semináře, podle které ze separability rozšíření K/k plyne $\sum_{s=1}^{m} e_s f_s = [K : k]$, a tedy podle druhé části je systém prvků (1) bází tělesa K nad k. Protože všechny prvky systému (1) patří do $\mathcal{O}$, stačí ukázat, že pokud v rovnosti (2) je nenulové $\alpha \in \mathcal{O}$, pak všechny koeficienty $c_{sij} \in \mathbf{o}$. To můžete ukázat pro pevně zvolené nenulové $\alpha \in \mathcal{O}$ takto: označíte-li r nejmenší hodnotu valuace v_0 na koeficientech c_{sij}, pak pokud $r < 0$, pak po vynásobení (2) prvkem z tělesa k, jehož valuace v_0 je $-r$, můžete pomocí výsledku z první části dostat spor.*