Příklady, na které stačila přijít řeč na semináři „Malé velké úlohy“ 16. 4. 2018

Zde uvedené „problémy“ ať již ve formě příkladů nebo úloh nejsou pro užití ve škole míněny jako konečné a neměnné, spíše jako východiska k dalším variacím a obměnám. To bylo také hlavní myšlenkou semináře.

1) Existují dvě různá komplexní čísla z taková, že $z^3 = 1$ a současně $z \neq 1$.
Vypočtěte součet těchto dvou čísel. (CERMAT 2012) (Na semináři varianta $z^3 + 1 = 0$.)

2) Jedeme dopravním prostředkem do místa M, které se nachází mezi dvěma stanicemi S_1 a S_2.
Na které z nich máme vystoupit a dojít pěšky, abychom byli v M co nejdříve?
(Místo M nemusí ležet na trase.)

3) (Problém šesti zásuvek) Varianta kombinatorické úlohy o pořadí šesti prvků.
Kolik je možností zpětného umístění šesti zásuvek na místa, ze kterých jsme je všechny vytáhli? Možnosti nebývají zaměnitelné, zásuvky se obvykle poněkud liší. Je-li správná jediná možnost, jaká je pravděpodobnost, že se „trefíme“ hned napoprvé? Až napodruhé? Právě při 4. pokusu? (Atd.)

4) Problém velkého kvantifikátoru v nápisech typu „Vše za 10 Kč“. Pohled právníků... (?)

5) Hit měsíce: 50% z ceny 299 Kč je prý 99 Kč (podle reklamního nápisu kdesi...)

6) Co vše lze vytěžit z časté žákovské „chybné úpravy“ $3.4^m = 12^m$? (Dvě až tři úlohy...)

7) Pro která čísla m má soustava rovnic $x - y = m$, $x^2 + y^2 = 25$ právě jedno řešení?
(Interpretace v AG) $\{\pm 5\sqrt{2}\}$

8) Řešte soustavu rovnic s parametrem a: $x + ay = 1$ $x - y = a^2$. Interpretujte geometricky.
Jaké konfigurace obou přímek mohou nastat vzhledem k různým hodnotám parametru a?

9) Některá řešení rovnice $x^2 - 4x = 1 - y^2$ jsou celočíselná (např. $x = 0$; $y = 1$, $x = 3$; $y = 2$...).
a) Najděte alespoň některá další celočíselná řešení. b) Kolik je celočíselných řešení celkem ?
Interpretujte geometricky, kružnice a mřížové body.

10) Řešte soustavu rovnic $|x| - y = 1$; $x^2 + (y + 1)^2 = 8$ (Interpretace v AG)

11) Je dána funkce $f(x) = 3x - 3$. Kolik čísel splňuje rovnost $3.f(x) = f(x + 3)$?
Nabídka: a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) nekonečně mnoho

12) a) V aritmetické posloupnosti platí: $d = -2$, $a_1 = 30$. Kolik členů této AP dává součet 234?
b) V sále je 234 sedadel. V první řadě jich je 30, v každé další vždy o dvě méně. Kolik řad sedadel je v sále?
V čem se podstatně liší tyto dvě „stejné“ úlohy?

13) Zjednodušte zlomek $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$ (tzv. Račinského úloha). Mnoho způsobů...

14) (Anička a babička) V rovině je dána přímka p a mimo ni v téže polorovině dva body A, B.
Najděte na přímce p bod M takový, že součet délek úseček AM + MB je minimální.
(Osová symetrie, trojúhelníková nerovnost. Zahradnická konstrukce elipsy, tečna v jejím bodě.)

15) (Růže v blázinci) Napiště rovnici přímky v rovině, která

a) prochází právě jedním mřížovým bodem
b) neprochází žádným mřížovým bodem
c) neprochází žádným racionálním bodem
d) prochází pouze konečným počtem n mřížových bodů, $n > 1$ (nelze, proč?)
e) Mějme dva svazky přímek: $y = k.x$ a $y = m.x$, kde k je racionální číslo, m je iracionální číslo. Kterých přímek je „víc“ a v jakém smyslu? Jak se to má s jejich incidencí s mřížovými body? (Racionální čísla, iracionální čísla, směrnice přímky. Spočetné a nespočetné množiny.)
f) Prochází některá z přímek $y = x.\sqrt{3} + \sqrt{2}$ $y = x.\sqrt{3} - \sqrt{12}$ některým mřížovým bodem?

16) Řešte diofantovské rovnice převedením na parametrické vyjádření přímky v rovině a její incidenci s mřížovými body:
a) $2x + 3y = 5$
b) Kolika způsoby lze zaplatit částku 30 Kč pouze dvoukorunami a pětikorunami?
c) V Brně je možno jezdit MHD (dokonce IDS JMK) také na tzv. univerzální jízdenku, která obsahuje 24 polí. Z nich lze použít 2, 3, 4 … pole podle přesných pravidel. Někteří lidé používají pouze dvě kombinace, 3 nebo 4 pole. Kolik takových jízd lze uskutečnit, má-li se „vyjezdit“ právě jedna celá jízdenka?
Kolika způsoby lze jízdy při možnosti 4x**3** + 3x**4** seřadit za sebou?

17) (Osudí a limita) Jakási reklama na plakátě v pražské tramvaji.
Text končí slovy „... a kdo splní ještě (...jistou) dodatečnou podmínku, bude jeho jméno vloženo do osudí třikrát, čímž jeho šance na výhru třikrát vzroste!“
Ukažte, že toto tvrzení je nepravdivé.
Využijte k ilustraci AG-interpretace a pojem limita funkce (posloupnosti) v nevlastním bodě.

18) Kolik % nepřeměněné radioaktivní látky je ve vzorku v okamžiku uplynutí poloviny poločasu přeměny (od začátku měření)?
Nabídka: a) 50% b) 71% c) 75% d) 80%
Poznámka: Tato formulace je nevhodná, dokonce zmateční, proč?
Jak by se mohla a měla vylepšit? Lze tušit, jak byla míněna.

19) Kořeny rovnice $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ (jednodušší verze $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$) jsou délkami hran kvádru. Aniž ji řešíte, najděte jeho <u>objem</u> a <u>povrch</u> (tj. aniž tyto kořeny znáte).

(Viètovy vztahy pro rovnici 3. stupně. Provedení důkazu Viètových vztahů pro rovnici <u>3. stupně</u> (resp. jejich odvození) je uvedeno jako <u>úloha</u> v gymnaziální učebnici Rovnice a nerovnice, str. 151. Studenti by je tedy měli znát, alespoň na G se s jejich znalostí počítá.)

Kterých dalších partií sš látky z M se může tato úloha dotknout a jak? Je jich hodně, jsou využitelné třeba při předmaturitní přípravě v M-semináři a pod.

20) Přímky p, q jsou rovnoběžné. Platí: p: $12x + 5y + 6 = 0$ q: $ax + 3y - 12 = 0$, kde a představuje reálné číslo. Určete vzdálenost přímek p, q. (CERMAT 2012)