Osnova přednášky Analýza rozptylu dvojného třídění

Motivace

Označení

Dvojné třídění bez interakcí

Součty čtverců
Testování hypotézy o nevýznamnosti sloupcového faktoru
Testování hypotézy o nevýznamnosti řádkového faktoru
Scheffého a Tukeyova metoda mnohonásobného porovnávání
Příklad

Dvojné třídění s interakcemi

Možné problémy v analýze rozptylu dvojného třídění s interakcemi
Příklad

Analýza rozptylu dvojného třídění

Motivace: Zkoumáme vliv dvou faktorů A a B na závisle proměnnou veličinu Y. Např. zjišťujeme, zda výnosy určité plodiny (náhodná veličina Y) jsou ovlivněny typem půdy (faktor A) a způsobem hnojení (faktor B). Předpokládáme, že faktor A má a úrovní (tj. počet typů půdy) a faktor B má b úrovní (tj. počet způsobů hnojení). Přitom máme n_{ij} pokusů takových, že na i-tém typu půdy byl použit j-tý způsob hnojení. Výsledky (tzn. výnosy dané plodiny) těchto n_{ij} pokusů označíme $Y_{ij1}, Y_{ij2}, ..., Y_{ijn_{ij}}$. Omezíme se na případy, kdy počet pozorování $n_{ij} = c \geq 1$ (jde o tzv. **vyvážené třídění**). Výsledky lze zapsat do tabulky:

		faktor B			
		1	2	...	b
faktor A	1	$Y_{111}, \ldots, Y_{11c}$	$Y_{121}, \ldots, Y_{12c}$	…	$Y_{1b1}, \ldots, Y_{1bc}$
	2	$Y_{211}, \ldots, Y_{21c}$	$Y_{221}, \ldots, Y_{22c}$	…	$Y_{2b1}, \ldots, Y_{2bc}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
	a	$Y_{a11}, \ldots, Y_{a1c}$	$Y_{a21}, \ldots, Y_{a2c}$	…	$Y_{ab1}, \ldots, Y_{abc}$

Analogicky jako u analýzy rozptylu jednoduchého třídění předpokládáme, že data se řídí normálním rozložením, tj.

$Y_{ij1}, Y_{ij2}, ..., Y_{ijc} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$, i = 1, …, a, j = 1, …, b

a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé, tedy

$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$,

kde ε_{ijk} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$.

Zajímá nás, zda všechny střední hodnoty μ_{ij} jsou stejné.

Přístup k problému se liší podle toho, zda faktory A, B jsou nezávislé (pak se jedná o **analýzu rozptylu dvojného třídění bez interakcí**) nebo se mohou nějakým způsobem ovlivňovat (jde o **analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi**).

Označení

$n = abc,$

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{c} Y_{ijk},$$

$$M_{ij.} = \frac{1}{c} Y_{ij.},$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} Y_{ijk},$$

$$M_{i..} = \frac{1}{bc} Y_{i..},$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} Y_{ijk},$$

$$M_{...} = \frac{1}{n} Y_{...}$$

Analogické označení zavedeme i pro jiné kombinace indexů.

Dvojné třídění bez interakcí

Předpokládáme, že řádkový faktor A a sloupcový faktor B se neovlivňují (např. to znamená, že každý ze čtyř způsobů hnojení působí stejně na každém ze tří druhů půdy).

Náhodné veličiny Y_{ijk} se řídí modelem

M_0: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$ pro i = 1, …, a, j = 1, …, b, k = 1, …, c, přičemž

ε_{ijk} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$,

μ je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,

α_i je efekt faktoru A na úrovni i,

β_j je efekt faktoru B na úrovni j.

Parametry μ, α_i, β_j neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. reparametrizační rovnice:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0 .$$

Součty čtverců

Podobně jako v analýze rozptylu jednoduchého třídění se počítají součty čtverců.

$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{...}\right)^2$ … **celkový součet čtverců**,

počet stupňů volnosti $f_T = n - 1$,

$S_A = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2$ … **součet čtverců pro řádkový faktor A**,

počet stupňů volnosti $f_A = a - 1$,

$S_B = ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2$ … **součet čtverců pro sloupcový faktor B**,

počet stupňů volnosti $f_B = b - 1$,

$S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{ij.}\right)^2$ … **reziduální součet čtverců**,

počet stupňů volnosti $f_E = n - a - b + 1$.

Lze dokázat, že $S_T = S_A + S_B + S_E$:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{...}\right)^2 = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2 + ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{ij.}\right)^2$$

Celkový průměr $M_{...}$ je bodovým odhadem střední hodnoty μ,

rozdíl $M_{i..} - M_{...}$ představuje bodový odhad i-té úrovně řádkového faktoru α_i

rozdíl $M_{.j.} - M_{...}$ představuje bodový odhad j-té úrovně sloupcového faktoru β_j.

Odhad $\hat{Y}_{ijk}$ pozorování Y_{ijk} má tedy tvar:

$$\hat{Y}_{ijk} = M_{...} + \left(M_{i..} - M_{...}\right) + \left(M_{.j.} - M_{...}\right).$$

Testování hypotézy o nevýznamnosti sloupcového faktoru

Pokud by nezáleželo na sloupcovém faktoru B, platila by hypotéza $\beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$ a dostali bychom model

M_1: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$

Platnost uvedené hypotézy ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_B = \dfrac{S_B / f_B}{S_E / f_E}$, která se řídí rozložením F(b-1,n-a-b+1), je-li model M_1 správný.

Hypotézu o nevýznamnosti sloupcového faktoru tedy zamítneme na hladině významnosti α, když platí:

$F_B \geq F_{1-\alpha}(b-1,n-a-b+1)$.

Testování hypotézy o nevýznamnosti řádkového faktoru

Kdyby nezáleželo ani na řádkovém faktoru, platila by hypotéza $\alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$ a dostali bychom model

M_2: $Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$

Rozdíl mezi modely M_1 a M_2 ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_A = \dfrac{S_A / f_A}{S_E / f_E}$, která se řídí rozložením F(a-1,n-a-b+1), je-li model M2 správný.

Hypotézu o nevýznamnosti řádkového faktoru tedy zamítneme na hladině významnosti α, když platí:

$F_A \geq F_{1-\alpha}(a-1,n-a-b+1)$.

Při uvedeném postupu tedy zjišťujeme, zda záleží na sloupcovém efektu B. Pokud ne, platí model M_1 a ptáme se, zda záleží na řádkovém efektu A, tj. zda platí model M_2. Postup lze samozřejmě provést i v jiném pořadí – nejdřív zkoumáme řádkový efekt A (tj. ověřujeme platnost modelu M_1’: $Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$) a poté sloupcový efekt B. Lze ukázat, že oba řetězce $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2$ a $M_0 \rightarrow M_1' \rightarrow M_2'$ dají stejné výsledky. (To platí pouze za předpokladu, že $n_{ij} = c$ pro všechna i, j.)

Výsledky výpočtů zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí**.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{S_E/f_E}$
řádkový efekt A	S_A	$f_A = a-1$	S_A/f_A	$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
sloupcový efekt B	S_B	$f_B = b-1$	S_B/f_B	$F_B = \frac{S_B/f_B}{S_E/f_E}$
reziduální	S_E	$f_E = n-a-b+1$	S_E/f_E	-
celkem	S_T	$f_T = n-1$	-	-

Scheffého a Tukeyova metoda mnohonásobného porovnávání

Zjistíme-li, že existují významné rozdíly mezi řádky, můžeme pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které dvojice řádků se významně liší. Určíme tedy, které rozdíly α_i - α_t jsou nenulové (na dané hladině významnosti).

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost $\alpha_i = \alpha_t$, když

$$\left|M_{i..} - M_{t..}\right| > \sqrt{\frac{2(a-1)}{bc} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(a-1, n-a-b+1)}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$\left|M_{i..} - M_{t..}\right| > \sqrt{\frac{1}{bc} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}}\, q_{1-\alpha}(a, n-a-b+1)$$, kde $q_{1-\alpha}(a,n-a-b+1)$ najdeme

v tabulkách kvantilů studentizovaného rozpětí.

Jestliže zjistíme významný rozdíl mezi sloupci, určujeme podobně, které dvojice sloupců se mezi sebou liší, tj. které rozdíly $\beta_j - \beta_t$ jsou nenulové.

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost $\beta_j = \beta_t$, když

$$\left|M_{.j.} - M_{.t.}\right| > \sqrt{\frac{2(b-1)}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(b-1, n-a-b+1)}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$\left|M_{.j.} - M_{.t.}\right| > \sqrt{\frac{1}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}} q_{1-\alpha}(b, n-a-b+1).$$

Příklad:
Byly zaznamenány tržby za prodej určitého zboží během tří stejně dlouhých časových období. Přitom byl sledován jednak vliv balení zboží (řádkový faktor A, úroveň 1 – balení v sáčku, úroveň 2 – balení v krabičce) a jednak vliv druhu reklamy (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez reklamy, úroveň 2 – reklama v novinách, úroveň 3 – reklama v TV a novinách). Výsledky prodeje (tj. hodnota prodaného zboží v miliónech Kč) jsou zaznamenány v tabulce:

		B		
		1-bez reklamy	2-reklama v novinách	3-reklama v TV a novinách
A	1-balení v sáčku	1	1	6
	2-balení v krabičce	3	4	9

Na hladině významnosti 0,05 je třeba posoudit vliv reklamy i vliv balení zboží na jeho prodej.

Řešení:

		B		
		1-bez reklamy	2-reklama v novinách	3-reklama v TV a novinách
A	1-balení v sáčku	1	1	6
	2-balení v krabičce	3	4	9

Data zpracujeme pomocí analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí. Přitom $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $n = 6$. Nejprve provedeme pomocné výpočty:

Součet všech hodnot: $X_{...} = 24$

Průměr všech hodnot: $M_{...} = 24/6 = 4$

Řádkové součty a průměry:

$X_{1..} = 8$, $X_{2..} = 16$, $M_{1..} = 8/3 = 2{,}67$, $M_{2..} = 16/3 = 5{,}33$

Sloupcové součty a průměry:

$X_{.1.} = 4$, $X_{.2.} = 5$, $X_{.3.} = 15$, $M_{.1.} = 4/2 = 2$, $M_{.2.} = 5/2 = 2{,}5$, $M_{.3.} = 15/2 = 7{,}5$.

a = 2, b = 3, c = 1, n = 6,
Celkový součet a průměr: $X_{...} = 24$, $M_{...} = 24/6 = 4$
Řádkové součty a průměry: $X_{1..} = 8$, $X_{2..} = 16$, $M_{1..} = 8/3$, $M_{2..} = 16/3$,
Sloupcové součty a průměry: $X_{.1.} = 4$, $X_{.2.} = 5$, $X_{.3.} = 15$, $M_{.1.} = 4/2 = 2$, $M_{.2.} = 5/2$, $M_{.3.} = 15/2$.

Řádkový součet čtverců:

$$S_A = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2 = 3\left[\left(\frac{8}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{16}{3}-4\right)^2\right] = \frac{32}{3} = 10,\overline{6},$$

Sloupcový součet čtverců:

$$S_B = ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2 = 2\left[(2-4)^2 + \left(\frac{5}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{15}{2}-4\right)^2\right] = 37,$$

Celkový součet čtverců:

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{...}\right)^2 = (1-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (9-4)^2 = 48,$$

Reziduální součet čtverců:

$$S_E = S_T - S_A - S_B = 48 - 10,\overline{6} - 37 = 0,\overline{3}.$$

Výsledky zapíšeme do **tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí**.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{S_E/f_E}$
způsob balení	$10,\overline{6}$	1	$10,\overline{6}$	63,99
druh reklamy	37	2	18,5	110,98
reziduální	$0,\overline{3}$	2	$0,1\overline{6}$	-
celkem	48	5	-	-

Odpovídající kvantily:
pro řádkový efekt $F_{0,95}(1,2) = 18,1$,
pro sloupcový efekt $F_{0,95}(2,2) = 19$.
Protože $F_A = 63,99 \geq 18,1$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že způsob balení nemá vliv na prodej zboží. Podobně $F_B = 110,98 \geq 19$, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že druh reklamy nemá vliv na prodej zboží.

V případě sloupcového faktoru – druh reklamy - lze pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které druhy reklamy se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.
Nejprve vypočítáme absolutní hodnoty rozdílů sloupcových průměrů:

$$\left|M_{.1.} - M_{..2.}\right| = \left|2 - \frac{5}{2}\right| = 0{,}5, \left|M_{.1.} - M_{..3.}\right| = \left|2 - \frac{15}{2}\right| = 5{,}5, \left|M_{.2.} - M_{..3.}\right| = \left|\frac{5}{2} - \frac{15}{2}\right| = 5$$

Pravá strana Scheffého vzorce je:

$$\sqrt{\frac{2(b-1)}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(b-1, n-a-b+1)} = \sqrt{\frac{2}{2} \cdot 0{,}1\overline{6} \cdot 19} = 2{,}52.$$

Vidíme, že podle Scheffého metody se na hladině významnosti 0,05 liší sloupce 1, 3 (tj. bez reklamy a s reklamou v TV a novinách) a sloupce 2, 3 (tj. s reklamou jen v novinách a reklamou v TV a novinách).
Pravá strana Tukeyova vzorce je:

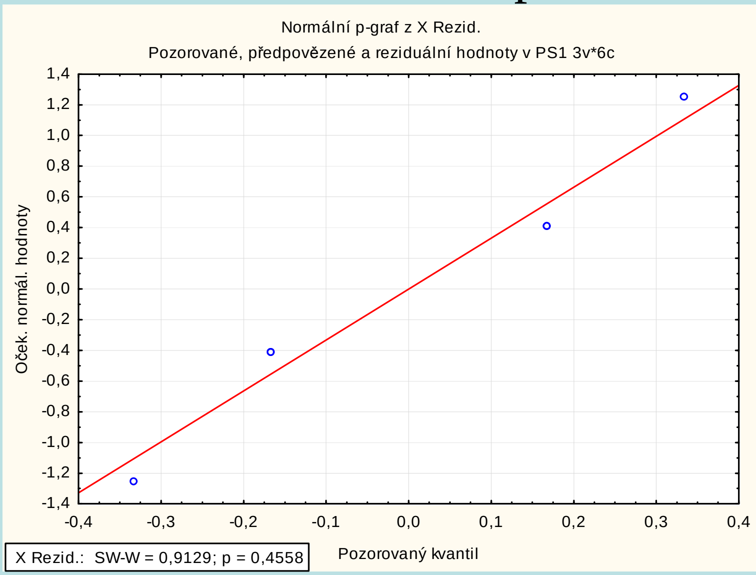
$$\sqrt{\frac{1}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}} q_{1-\alpha}(b, n-a-b+1) = \sqrt{\frac{0{,}1\overline{6}}{2}} \cdot q_{0,95}(3,2) = \sqrt{\frac{0{,}1\overline{6}}{2}} \cdot 8{,}33 = 2{,}4.$$

Podle Tukeyovy metody se na hladině významnosti 0,05 také liší sloupce 1, 3 a sloupce 2, 3. Výhodnější je hodnota získaná Tukeyovou metodou, protože je menší.

Podívejme se ještě na počítačové výstupy. Nejprve ověříme předpoklady metody.

Nezávislost: splněno, plyne přímo za způsobu získání dat.

Normalita dat: ověříme pomocí N-P grafu a S-W testu aplikovaného na rezidua:



Na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě nezamítáme, p-hodnota S-W testu je 0,4558, což je větší než 0,05.

Homogenita rozptylů: nelze ověřit, všech šest výběrů má rozsah 1.

Výpočet průměrů:

Efekt	Úroveň Faktor	N	X Průměr
Celkem		6	4,000000
A	sacek	3	2,666667
A	krabicka	3	5,333333
B	bez reklamy	2	2,000000
B	reklama v novinach	2	2,500000
B	reklama v TV a novinach	2	7,500000

Tabulka dvoufaktorové ANOVY bez interakcí:

Jednorozm. výsledky pro každou záv. proměnnou (baleni_a_reklama.sta)
Přeparametrizovaný model
Dekompozice typu III

Efekt	Stupně volnosti	X SČ	X PČ	X F	X p
A	1	10,6667	10,66667	64,0000	0,015268
B	2	37,0000	18,50000	111,0000	0,008929
Chyba	2	0,3333	0,16667		
Celkem	6	144,0000			

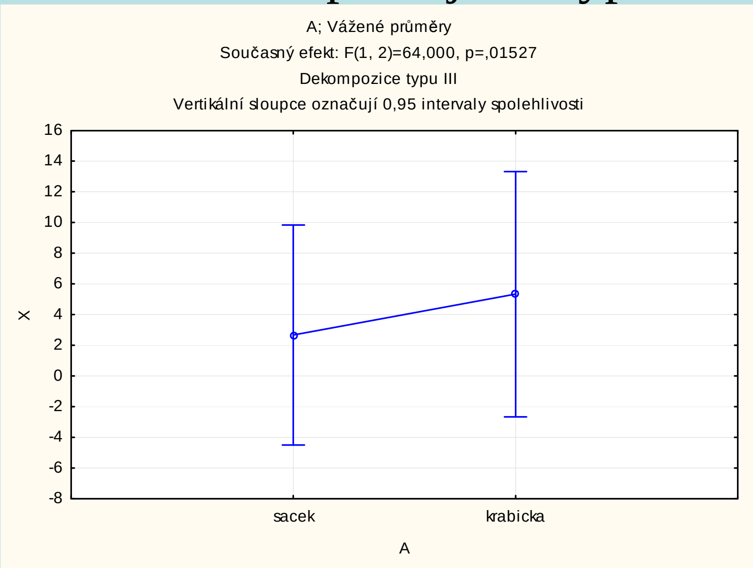
Na hladině významnosti 0,05 zamítáme jak hypotézu o nevýznamnosti typu balení výrobku tak hypotézu o nevýznamnosti druhu reklamy.

Tabulka p-hodnot pro Tukeyovu metodu mnohonásobného porovnávání druhů reklamy:

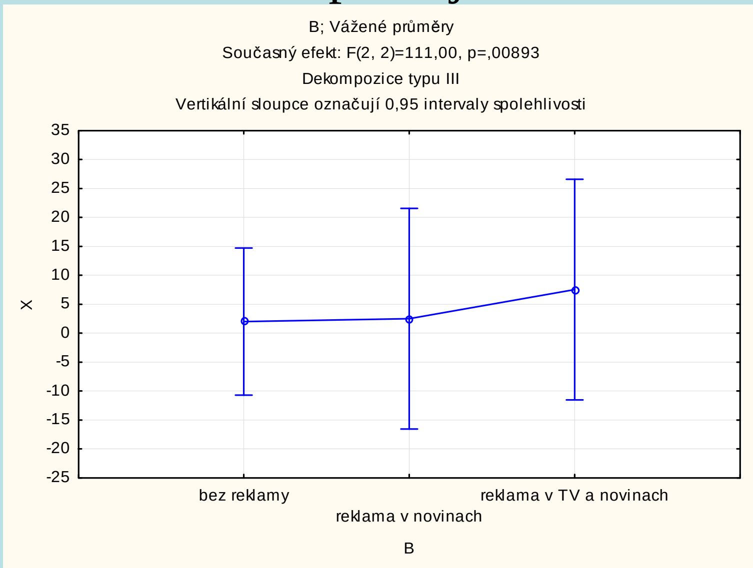
Č. buňky	B	{1} 2,0000	{2} 2,5000	{3} 7,5000
1	bez reklamy		0,548301	0,010156
2	reklama v novinach	0,548301		0,012218
3	reklama v TV a novinach	0,010156	0,012218	

Na hladině významnosti 0,05 se liší dvojice variant (bez reklamy, reklama v TV a novinách) a dvojice (reklama v novinách, reklamy v TV a novinách). Naopak se neliší dvojice (bez reklamy, reklama v novinách).

Graf závislosti prodeje na typu balení:



Graf závislosti prodeje na druhu reklamy:



Dvojné třídění s interakcemi

Nyní předpokládáme, že faktory A a B se mohou ovlivňovat (např. některý způsob hnojení má zcela specifický vliv na určitý typ půdy). Náhodné veličiny Y_{ijk} se řídí modelem

M_0: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ pro i = 1, …, a, j = 1, …, b, k = 1, …, c, přičemž γ_{ij} je interakce mezi faktorem A na úrovni i a faktorem B na úrovni j. V této situaci předpokládáme, že $c \geq 2$. Parametry μ, α_i, β_j neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. reparametrizační rovnice:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{a} \gamma_{ij} = 0, \sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij} = 0.$$

Nyní můžeme utvořit modely

M_1: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$

M_2: $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$

M_3: $Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$

(Lze samozřejmě použít i jiný řetězec modelů, kdy postupně klademe rovny nule parametry α_i, β_j, γ_{ij} v jiném pořadí.)

Vypočítáme součty čtverců:

celkový $S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{...}\right)^2$, $f_T = n - 1$,

řádkový $S_A = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2$, $f_A = a - 1$,

sloupcový $S_B = ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2$, $f_B = b - 1$,

reziduální $S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(Y_{ijk} - M_{ij.}\right)^2$, $f_E = n - ab$

a součet čtverců pro interakce $S_{AB} = c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(M_{ij.} - M_{i..}\right) - \left(M_{.j.} - M_{...}\right)\right]^2$, $f_{AB} = (a-1)(b-1)$.

Vliv interakcí je prokázán na hladině významnosti α, když

$$F_{AB} = \frac{S_{AB} / f_{AB}}{S_E / f_E} \geq F_{1-\alpha}\left((a-1)(b-1), n - ab\right).$$

Výsledky zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi:**

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{S_E/f_E}$
řádkový faktor A	S_A	$f_A = a-1$	S_A/f_A	$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
sloupcový faktor B	S_B	$f_B = b-1$	S_B/f_B	$F_B = \frac{S_B/f_B}{S_E/f_E}$
interakce A,B	S_{AB}	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	S_{AB}/f_{AB}	$F_{AB} = \frac{S_{AB}/f_{AB}}{S_E/f_E}$
reziduální	S_E	$f_E = n-ab$	S_E/f_E	-
celkem	S_T	$f_T = n-1$	-	-

Je třeba si povšimnout, že součet $S_{AB} + S_E$ resp. $f_{AB} + f_E$ dá hodnotu S_E resp. f_E v tabulce bez interakcí.

Možné problémy v analýze rozptylu dvojného třídění s interakcemi

a) Ukáže-li se vliv interakcí nevýznamný, vzniká otázka, zda testovat vliv řádků resp. sloupců pomocí tabulky s interakcemi nebo provést novou analýzu rozptylu, ale tentokrát bez interakcí. Převládá názor, že je zapotřebí dokončit analýzu rozptylu s interakcemi.

b) Pokud interakce vyjdou významné a řádky a sloupce rovněž, zpravidla se nedoporučuje provádět mnohonásobné porovnávání, protože by se mohlo stát, že některá interakce by byla mnohem výraznější než příslušný řádkový resp. sloupcový efekt.

c) Nejsou-li interakce významné a řádky resp. sloupce ano, pak lze provést mnohonásobné porovnávání zcela analogicky jako v případě třídění bez interakcí, avšak je jiný počet stupňů volnosti f_E.

Tabulka odhadů různých parametrů a rozptylů těchto odhadů

parametr	odhad	rozptyl odhadu
μ	$M_{...}$	σ^2/n
$\mu + \alpha_i$	$M_{i..}$	σ^2/bc
$\mu + \beta_j$	$M_{.j.}$	σ^2/ac
$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$	$M_{ij.}$	σ^2/c
α_i	$M_{i..} - M_{...}$	$\sigma^2(a-1)/n$
β_j	$M_{.j.} - M_{...}$	$\sigma^2(b-1)/n$
γ_{ij}	$(M_{ij.} - M_{i..}) - (M_{.j.} - M_{...})$	$\sigma^2(a-1)(b-1)/n$

Neznámý rozptyl σ^2 nahradíme jeho odhadem, tj. průměrným reziduálním čtvercem

$$s^2 = \frac{S_e}{n - ab}.$$

Příklad:

Byly zkoumány výnosy sena (v q/ha) v závislosti na typu půdy (řádkový faktor A, úroveň 1 – normální půda, úroveň 2 – kyselá půda) a na způsobu hnojení (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez hnojení, úroveň 2 – hnojení chlévskou mrvou, úroveň 3 – hnojení vápenatým hnojivem). Každá kombinace faktorů A a B byla realizována čtyřikrát nezávisle na sobě. Výnosy sena jsou uvedeny v tabulce:

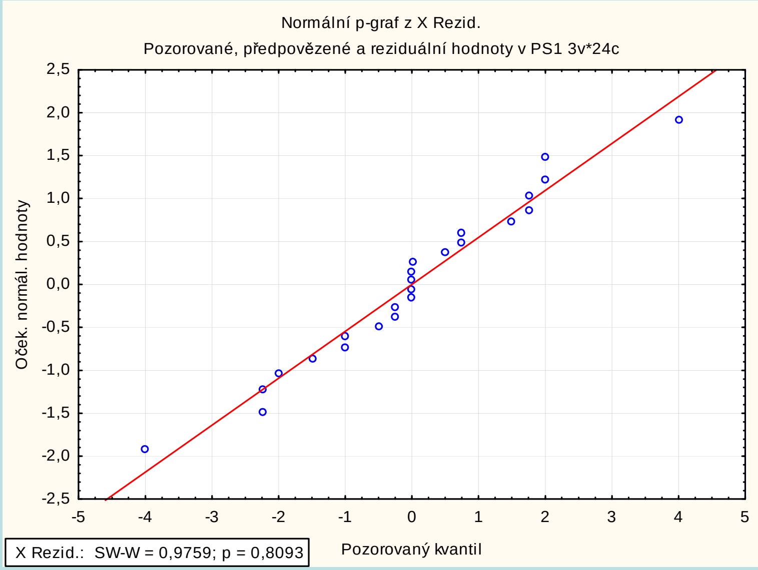
		B		
		1-bez hnojení	2-chlévská mrva	3-vápenaté hnojivo
A	1-normální půda	28 32 30 30	37 36 39 36	34 38 37 36
	2-kyselá půda	31 27 30 29	34 34 30 38	42 40 41 39

Na hladině významnosti 0,05 máme posoudit vliv typu půdy a způsobu hnojení (včetně případných interakcí) na výnosy sena.

Řešení:
Data zpracujeme pomocí analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi. Přitom a = 2, b = 3, c = 4, n = abc = 24.

Ověření předpokladů:
Nezávislost všech šesti výběrů: splněno, plyne přímo ze způsobu získání dat.

Normalita dat: ověřeno pomocí N-P grafu a S-W testu aplikovaného na rezidua.



Příslušná p-hodnota je 0,8093, tedy na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě reziduí nezamítáme.

Homogenita rozptylů: nemusí se zkoumat, jde o vyvážené třídění. Jinak lze ověřit pomocí Levenova testu.

	PČ Efekt	PČ Chyba	F	p
X	0,600000	1,555556	0,385714	0,852058

Levenův test hypotézu o homogenitě rozptylů nezamítá na hladině významnosti 0,05, protože jeho p-hodnota je 0,852.

Průměrné výnosy ve všech šesti skupinách:

Č. buňky	A	B	X Průměr	N
1	normální	bez hnojení	30	4
2	normální	chlévská mrva	37	4
3	normální	vápenaté hnojivo	36,25	4
4	kyselá	bez hnojení	29,25	4
5	kyselá	chlévská mrva	34	4
6	kyselá	vápenaté hnojivo	40,5	4

Tabulka dvoufaktorové ANOVY s interakcemi:

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{S_E / f_E}$
typ půdy	0,166	1	0,166	0,04
způsob hnojení	318,25	2	159,125	41,81
interakce	55,084	2	27,542	7,24
reziduální	68,5	18	3,8056	-
celkem	442	23	-	-

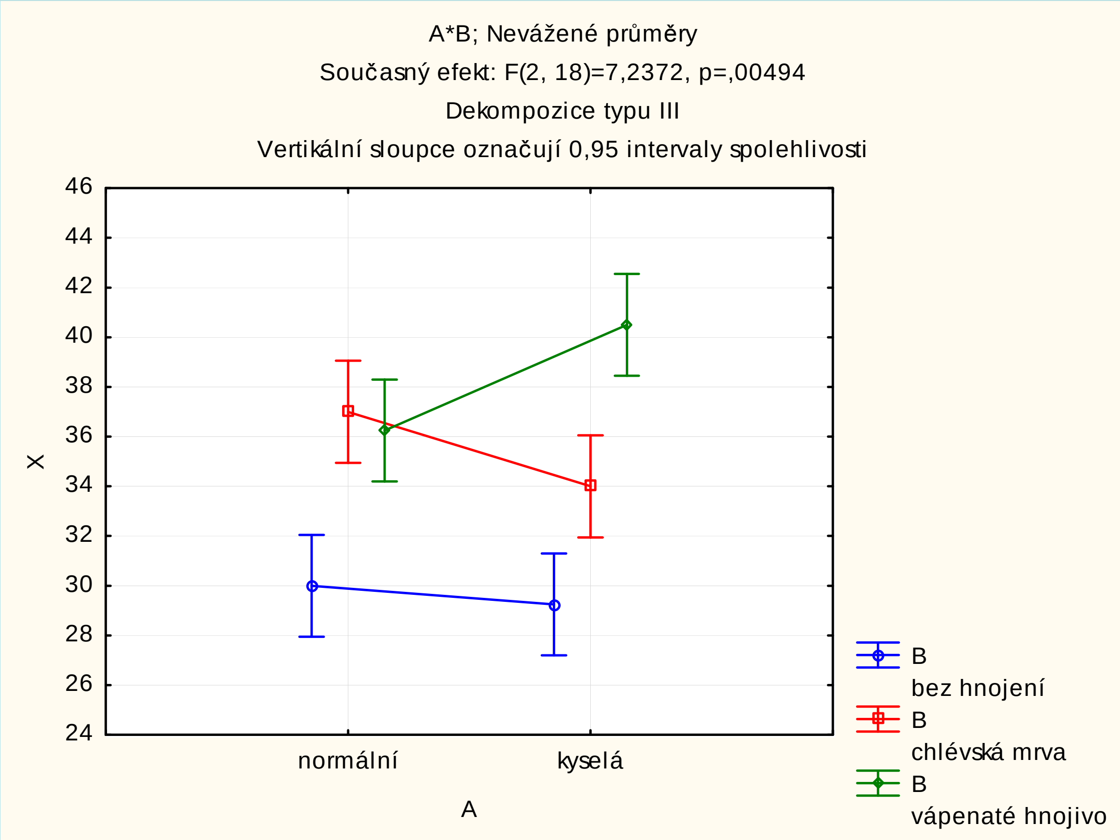
Odpovídající kvantily:
pro řádkový efekt $F_{0,95}(1,18) = 4,41$, pro sloupcový efekt $F_{0,95}(2,18) = 3,55$, pro interakce $F_{0,95}(2,18) = 3,55$.
Protože $F_A = 0,04 < 4,41$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že typ půdy neovlivňuje výnos sena.
Dále $F_B = 41,81 \geq 3,55$, tedy na hladině významnosti 0,05 se prokázal rozdíl mezi použitými způsoby hnojení.
Jelikož $F_{AB} = 7,24 \geq 3,55$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nevýznamnosti interakcí (tj. aspoň jeden způsob hnojení působí jinak na půdu normální než kyselou).

Počítačový výstup:

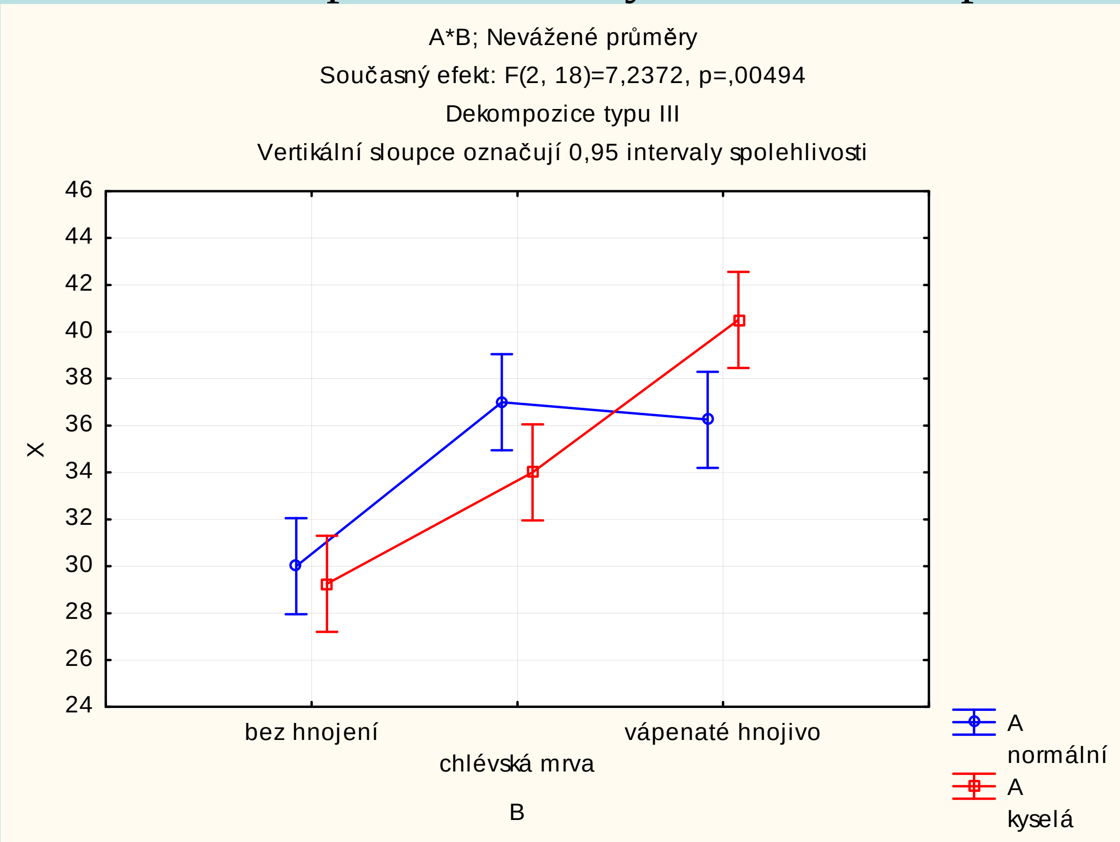
Efekt	Jednorozměrné testy významnosti pro X (seno.sta) Přeparametrizovaný model Dekompozice typu III				
	SČ	Stupně volnosti	PČ	F	p
A	0,1667	1	0,1667	0,04380	0,836585
B	318,2500	2	159,1250	41,81387	0,000000
A*B	55,0833	2	27,5417	7,23723	0,004938
Chyba	68,5000	18	3,8056		

Vidíme, že p-hodnota pro testovou statistiku F_B je velmi blízká 0, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení nemá vliv na výnosy sena. Podobně p-hodnota pro testovou statistiku F_{AB} je 0,004938, což znamená, že na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení působí na oba typy půd stejně.

Graf závislosti průměrného výnosu sena na typu půdy:



Graf závislosti průměrného výnosu sena na způsobu hnojení:



V obou grafech se objevuje křížení, které je typické pro případ, kdy působí interakce mezi faktory A, B.