Osnova přednášky „Jednofaktorová MANOVA“

1. Popis problému
2. Test hypotézy o shodě vektorů středních hodnot
3. Simultánní testy o složkách vektorů středních hodnot
4. Vícerozměrná obdoba mnohonásobného porovnávání
5. Simultánní testy v mnohonásobném porovnávání
6. Předpoklady v MANOVĚ a jejich ověřování
7. Aplikace MANOVY v psychologickém výzkumu

Vícerozměrná analogie analýzy rozptylu jednoduchého třídění (jednofaktorová MANOVA)

1. Popis problému

Předpokládáme, že faktor A má $r \geq 3$ úrovní a přitom na h-té úrovni bylo provedeno n_h p-rozměrných pozorování $x_{h11},\dots,x_{h1p},\dots,x_{hn_h1},\dots,x_{hn_hp}$, která považujeme za realizaci p-rozměrného náhodného výběru rozsahu n_h, $h = 1,\dots,r$. Na každé úrovni faktoru musí být provedeno více pozorování než je závisle proměnných veličin, tj. $n_h > p$, $h = 1,\dots,r$. Výsledky lze zapsat do tabulky:

<table>
<tr><th>faktor A</th><th>výsledky</th></tr>
<tr><td>úroveň 1</td><td>$x_{111},\dots,x_{11p}$
……………
$x_{1n_11},\dots,x_{1n_1p}$</td></tr>
<tr><td>………...</td><td>……………</td></tr>
<tr><td>úroveň r</td><td>$x_{r11},\dots,x_{r1p}$
……………
$x_{rn_r1},\dots,x_{rn_rp}$</td></tr>
</table>

Zavedeme následující označení:

h … index skupiny, i … index objektu, j … index proměnné

$n = \sum_{r=1}^{h} n_r$ … celkový rozsah všech r výběrů

$M_{hj} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} X_{hij}$ … výběrový průměr j-té proměnné v h-té skupině, $j = 1, \dots, p$, $h = 1, \dots, r$

$\mathbf{M}_h = \begin{pmatrix} M_{h1} \\ \vdots \\ M_{hp} \end{pmatrix}$ … vektor výběrových průměrů v h-té skupině, $h = 1, \dots, r$

$\mathbf{M} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{r} n_h \mathbf{M}_h$ … vektor celkových průměrů

$\mathbf{S}_\mathbf{h} = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_h - \mathbf{M}_h)(\mathbf{X}_h - \mathbf{M}_h)^T$ … výběrová varianční matice v h-té skupině, $h = 1, \dots, r$

$\mathbf{S} = \frac{1}{n - r} \sum_{h=1}^{r} (n_h - 1)\mathbf{S}_h$ … vážený průměr výběrových variančních matic

Příklad dat vhodných pro vícerozměrnou analýzu rozptylu

Na 45 vzorcích rudy pocházejících ze tří ložisek byly zjištěny hodnoty těchto čtyř proměnných:
X_1 … obsah vanadu v popelu (v promile)
X_2 … obsah železa v popelu (v promile)
X_3 … obsah nasycených uhlovodíků (v setinách procenta)
X_4 … obsah aromatických uhlovodíků (v setinách procenta)

Máme 3 skupiny, v 1. skupině je 7 čtyřrozměrných pozorování, ve 2. skupině 8 pozorování a ve 3. skupině 30 pozorování.

Ukázka části datového souboru:

	1 ID	2 X1	3 X2	4 X3	5 X4
1	1. naleziště	39	51	706	1219
2	1. naleziště	57	31	514	863
3	1. naleziště	28	31	900	1130
4	1. naleziště	21	45	720	801
5	1. naleziště	25	35	781	1323
6	1. naleziště	59	43	625	1342
7	1. naleziště	27	35	511	900
8	2. naleziště	50	47	706	610
9	2. naleziště	34	32	582	469
10	2. naleziště	84	17	631	455
11	2. naleziště	42	35	569	222
12	2. naleziště	39	41	563	294
13	2. naleziště	39	36	619	227
14	2. naleziště	73	32	802	1292
15	2. naleziště	44	46	754	576
16	3. naleziště	63	13	424	827
17	3. naleziště	73	24	434	299
18	3. naleziště	78	18	392	609
19	3. naleziště	78	25	539	620
20	3. naleziště	78	26	502	250
21	3. naleziště	95	17	352	571

Vektor $\mathbf{M}_1$ výběrových průměrů v 1. skupině:

36,571
38,714
679,571
1082,571

Vektor $\mathbf{M}_2$ výběrových průměrů ve 2. skupině:

50,6250
35,7500
653,2500
518,1250

Vektor $\mathbf{M}_3$ výběrových průměrů ve 3. skupině:

76,5333
21,4667
457,4667
614,8667

Vektor $\mathbf{M}$ celkových průměrů:

65,7111
26,6889
526,8222
670,4222

X_1 … obsah vanadu v popelu (v promile)
X_2 … obsah železa v popelu (v promile)
X_3 … obsah nasycených uhlovodíků (v setinách procenta)
X_4 … obsah aromatických uhlovodíků (v setinách procenta)

Výběrová varianční matice $\mathbf{S}_1$ v 1. skupině:

Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	244,62	2,5238	-1103,55	767,95
X2	2,52	59,2381	28,52	355,19
X3	-1103,55	28,5238	20002,95	13339,45
X4	767,95	355,1905	13339,45	51132,95

Výběrová varianční matice $\mathbf{S}_2$ ve 2. skupině:

Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	325,696	-111,393	749,11	3446,9
X2	-111,393	91,357	190,50	-133,5
X3	749,107	190,500	8149,64	26549,0
X4	3446,911	-133,536	26548,96	119963,8

Výběrová varianční matice $\mathbf{S}_3$ ve 3. skupině:

Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	223,223	-36,602	-511,292	663,87
X2	-36,602	34,671	267,637	-567,56
X3	-511,292	267,637	9071,223	4749,31
X4	663,867	-567,556	4749,306	53134,19

Společná výběrová varianční matice $\mathbf{S}$:

Proměnná	X1	X2	X3	X4
X1	488,62	-160,637	-1934,96	-812,22
X2	-160,64	101,992	958,06	388,52
X3	-1934,96	958,057	19900,79	18314,85
X4	-812,22	388,521	18314,85	94423,93

X_1 … obsah vanadu v popelu (v promile)
X_2 … obsah železa v popelu (v promile)
X_3 … obsah nasycených uhlovodíků (v setinách procenta)
X_4 … obsah aromatických uhlovodíků (v setinách procenta)

Celková variabilita obsažená v datech je vyjádřena maticí $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \sum_{h=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})(\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M})^T .$$

Matici $\mathbf{T}$ lze rozložit na součet dvou matic: $\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{B}$,

kde $\mathbf{E}$ je matice reziduální variability

$$\mathbf{E} = \sum_{h=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M}_h)(\mathbf{X}_{hi} - \mathbf{M}_h)^T = \sum_{h=1}^{r} (n_h - 1)\mathbf{S}_\mathbf{h}$$

a $\mathbf{B}$ je matice meziskupinové variability

$$\mathbf{B} = \sum_{h=1}^{r} n_h (\mathbf{M}_h - \mathbf{M})(\mathbf{M}_h - \mathbf{M})^T .$$

Vliv faktoru, který způsobuje rozpad datové matice na skupiny, se může projevit jen v matici $\mathbf{B}$. Variabilitu projevující se v matici $\mathbf{E}$ tedy považujeme za reziduální, způsobenou buď náhodnými vlivy nebo faktory, kterou nejsou z našeho hlediska podstatné.

Matice **T** celkové variability:

	X1	X2	X3	X4
X1	21499,2	-7068,04	-85138,3	-35738
X2	-7068,0	4487,64	42154,5	17095
X3	-85138,3	42154,51	875634,6	805853
X4	-35737,5	17094,91	805853,4	4154653

Matice **E** reziduální variability:

	X1	X2	X3	X4
X1	10221,1	-1826,1	-16205,0	47988
X2	-1826,1	2000,4	9266,1	-15263
X3	-16205,0	9266,1	440130,7	403609
X4	47988,2	-15262,7	403609,3	2687436

Matice **B** meziskupinové variability:

	X1	X2	X3	X4
X1	11278,1	-5241,94	-68933,3	-83726
X2	-5241,9	2487,24	32888,4	32358
X3	-68933,3	32888,41	435503,9	402244
X4	-83725,7	32357,61	402244,1	1467217

2. Test hypotézy o shodě vektorů středních hodnot

Nadále budeme předpokládat, že náhodný výběr příslušející h-té úrovni faktoru A, tedy posloupnost stochasticky nezávislých p-rozměrných náhodných vektorů $\mathbf{X}_{h1},\ldots,\mathbf{X}_{hn_h}$, pochází z p-rozměrného normálního rozložení $N_p(\boldsymbol{\mu}_h,\boldsymbol{\Sigma})$, $h=1,\ldots,r$ a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé.

Na hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0:\boldsymbol{\mu}_1=\ldots=\boldsymbol{\mu}_r$ proti alternativní hypotéze H_1 : aspoň jedna dvojice vektorů středních hodnot se liší.

Při testování této hypotézy můžeme použít až čtyři různé testy založené na

- Wilksově kritériu,
- Lawleyově – Hotellingově kritériu,
- Pillaiově kritériu,
- Royově kritériu.

Každé z těchto kritérií je určitým způsobem založeno na vlastních číslech matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$.

Označme λ_g g-té vlastní číslo této matice a s počet nenulových vlastních čísel, přičemž $s=\min(p,r-1)$.

Uvedeme vzorce pro vyjádření jednotlivých kritérií:

Wilksovo kritérium: $\Lambda = \dfrac{\det(\mathbf{E})}{\det(\mathbf{E}+\mathbf{B})} = \prod_{g=1}^{s} \dfrac{1}{1+\lambda_g}$,

Lawleyovo – Hotellingovo kritérium: $T^2 = \mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}\right) = \sum_{g=1}^{s} \lambda_g$,

Pillaiovo kritérium: $P = \mathrm{tr}\left(\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}\right) = \sum_{g=1}^{s} \dfrac{\lambda_g}{1+\lambda_g}$,

Royovo kritérium: $V = \lambda_{(1)}$, kde $\lambda_{(1)}$ je největší vlastní číslo matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$.

V praxi je nejpoužívanější Wilksovo kritérium. Nabývá hodnot mezi 0 a 1, přičemž vyšší hodnoty znamenají, že střední hodnoty se liší méně.
Testová statistika F_W pro test shody vektorů středních hodnot vznikne transformací Λ:
$F_W = -\left(n - \dfrac{p+r}{2} - 1\right)\ln\Lambda$. V případě platnosti nulové hypotézy se statistika F_W asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(p(r-1))$. H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když tato statistika nabude hodnoty větší nebo rovné $1-\alpha$ kvantilu uvedeného rozložení, tj. $F_W \geq \chi^2_{1-\alpha}(p(r-1))$. Znamená to, že jsme s rizikem omylu nejvýše $100\alpha\%$ prokázali, že alespoň dvě skupiny nemají stejné vektory středních hodnot.

3. Simultánní testy o složkách vektorů středních hodnot

Prokážeme-li na zvolené hladině významnosti α rozdíl mezi vektory středních hodnot, budeme dále zjišťovat, které ze sledovaných p kvantitativních proměnných $X_1, \ldots, X_p$ způsobují rozdíl mezi skupinami. Provedeme tedy tzv. simultánní testy. Ty odhalí, které jednotlivé proměnné jsou závislé na faktoru A. Současně tedy testujeme p hypotéz

$H_{01}: \mu_{11} = \ldots = \mu_{1r}$, ..., $H_{0p}: \mu_{p1} = \ldots = \mu_{pr}$.

Použijeme testovou statistiku založenou na Wilksově kritériu:

$$K_j = -\left(n - \frac{p+r}{2} - 1\right) \ln \frac{e_{jj}}{t_{jj}},$$

kde e_{jj} resp. t_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $\mathbf{E}$ resp. $\mathbf{T}$, $j = 1, \ldots, p$.

V případě platnosti nulové hypotézy se statistika K_j asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(p(r-1))$.

H_{0j} tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $K_j \geq \chi^2_{1-\alpha}(p(r-1))$.

Upozornění: Může však nastat situace, kdy hypotéza o shodě vektorů středních hodnot byla na hladině významnosti α zamítnuta, avšak simultánní testy neprokáží žádný rozdíl mezi složkami vektorů středních hodnot. V takovém případě jsou rozdíly mezi skupinami způsobeny nějakou kombinací sledovaných p proměnných.

4. Vícerozměrná obdoba mnohonásobného porovnávání

Dalším krokem, který následuje po zamítnutí hypotézy o shodě vektorů středních hodnot, je provedení vícerozměrné obdoby mnohonásobného porovnávání. Chceme totiž zjistit, které dvojice vektorů středních hodnot se liší na zvolené hladině významnosti α. Budeme tedy pro všechny indexy $h, h^* = 1, \ldots, r, h \neq h^*$ testovat hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu}_h = \boldsymbol{\mu}_{h^*}$ proti $H_1 : \boldsymbol{\mu}_h \neq \boldsymbol{\mu}_{h^*}$.

Těchto testů je $\binom{r}{2}$.

Nulovou hypotézu zamítneme na hladině významnosti α, když testová statistika (založená na Lawleyově – Hotellingově kritériu) $\frac{n-r-p+1}{(r-1)p} \cdot \frac{n_h n_{h^*}}{n_h + n_{h^*}} \left(\mathbf{M}_h - \mathbf{M}_{h^*}\right)^T \mathbf{E}^{-1} \left(\mathbf{M}_h - \mathbf{M}_{h^*}\right)$ nabude hodnoty aspoň $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$, kde $\nu_1 = \frac{(r-1)p(n-r-p)}{n-2-(r-1)p}$, $\nu_2 = n-r-p+1$. Pak jsme s rizikem omylu nejvýše $100\alpha\%$ prokázali, že h-tá a h^*-tá skupina nemají stejné vektory středních hodnot.

5. Simultánní testy v mnohonásobném porovnávání

Provedení MANOVY uzavřeme tím, že odhalíme případné rozdíly mezi jednotlivými proměnnými v rámci dvojic skupin. Pro všechny indexy h, h^*, $h \neq h^*$ a všechny indexy $j = 1, \ldots, p$ testujeme na hladině významnosti α hypotézu $H_0 : \mu_{hj} = \mu_{h^*j}$ proti $H_1 : \mu_{hj} \neq \mu_{h^*j}$.
Zajímá nás tedy rozdíl mezi středními hodnotami j-té proměnné v h-té a h^*-té skupině. Těchto testů je $\frac{pr(r-1)}{2}$.
Testová statistika má tvar:

$$\frac{n-r-p+1}{(r-1)p(n-r)} \cdot \frac{n_h n_{h^*}}{n_h + n_{h^*}} \cdot \frac{\left(M_{hj} - M_{h^*j}\right)^2}{S_j^2}$$ (S_j^2 je j-tý diagonální prvek matice **S**) .

V případě platnosti nulové hypotézy se tato statistika asymptoticky řídí rozložením $F(\nu_1, \nu_2)$, kde $\nu_1 = \frac{(r-1)p(n-r-p)}{n-2-(r-1)p}$, $\nu_2 = n - r - p + 1$.

Hypotézu o shodě j-tých složek vektorů středních hodnot v h-té a h^*-té skupině zamítneme na hladině významnosti α, když tato testová statistika nabude hodnoty větší nebo rovné kvantilu $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$.

Upozornění:
Vícerozměrnou obdobu mnohonásobného porovnávání ani simultánní testy v mnohonásobném porovnávání systém STATISTICA neposkytuje. Problém lze vyřešit tím, že na zvolenou hladinu významnosti α aplikujeme Bonferroniho korekci.

V prvém případě (tj. pro vícerozměrnou obdobu mnohonásobného porovnávání) provedeme pro každou dvojici skupin vícerozměrný dvouvýběrový t-test (tj. Hotellingův T^2 test) a jeho vypočtenou p-hodnotu porovnáme s číslem $\frac{\alpha}{\binom{r}{2}}$. Je-li $p \le \frac{\alpha}{\binom{r}{2}}$, považujeme rozdíl ve vektorech středních hodnot příslušných dvojic skupin za prokázaný.

Ve druhém případě (tj. pro simultánní testy v mnohonásobném porovnávání) provedeme pro každou proměnnou a každou dvojici skupin dvouvýběrový t-test a jeho vypočtenou p-hodnotu porovnáme s číslem $\frac{\alpha}{\frac{pr(r-1)}{2}}$. Je-li $p \le \frac{\alpha}{\frac{pr(r-1)}{2}}$, zamítáme hypotézu o shodě středních hodnot příslušné proměnné v daných dvou skupinách.

6. Předpoklady v MANOVĚ a jejich ověřování

Vícerozměrná normalita: V každé z r skupin bychom měli testovat hypotézu, že vektor proměnných $(X_1, \ldots, X_p)^T$ se řídí p-rozměrným normálním rozložením. Testy na vícerozměrnou normalitu však nejsou běžnou součástí statistických programových systémů.
V praxi se spokojíme s tím, že otestujeme normalitu pro každou jednotlivou proměnnou zvlášť. Výsledky těchto testů však posuzujeme jen orientačně. Menší odchylky od normality nebrání provedení MANOVY, při větším porušení používáme vhodné transformace.

Shoda variančních matic: Je-li třídění vyvážené, tj. ve všech skupinách je stejný počet pozorování, je MANOVA odolná vůči porušení předpokladu shody variančních matic. V případě nevyváženého třídění je nutné provést Boxův test shody variančních matic. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0 : \mathbf{\Sigma}_1 = \ldots = \mathbf{\Sigma}_r$ proti alternativní hypotéze H_1 : aspoň jedna dvojice variančních matic se liší. Testová statistika má tvar:

$$T_0 = \frac{1}{C_p}\left[(n-r)\ln|\mathbf{S}| - \sum_{h=1}^{r}(n_h - 1)\ln|\mathbf{S}_h|\right],$$ kde

$$C_p = 1 + \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(r-1)(p+1)}\left(\sum_{h=1}^{r}\frac{1}{n_h - 1} - \frac{1}{n-r}\right)$$ je konstanta zlepšující aproximaci.

V případě platnosti nulové hypotézy se statistika T_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2\left(\frac{(r-1)p(p+1)}{2}\right)$. Pokud testová statistika nabude hodnoty aspoň $\chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{(r-1)p(p+1)}{2}\right)$, hypotézu o shodě variančních matic zamítneme na asymptotické hladině významnosti α.

Linearita vztahů: Vzhledem k tomu, že MANOVA patří do skupiny obecných lineárních modelů, předpokládá se, že v každé skupině existuje mezi závisle proměnnými veličinami přibližně lineární vztah. Tento předpoklad lze orientačně ověřit pomocí dvourozměrných tečkových diagramů. Výskyt nelineárních vztahů snižuje sílu testů v MANOVĚ.

7. Aplikace MANOVY v psychologickém výzkumu

Informace o projektu „Výkonová motivace rozumově nadaných studentů s dyslexií“

Institut výzkumu dětí, mládeže a rodiny je součástí Fakulty sociálních studií Masarykovy univerzity. Vědecká činnost tohoto institutu je zaměřena na sledování psychických a sociálních charakteristik dětí, adolescentů a jejich rodin. V nedávné minulosti zde mj. řešili projekt „Výkonová motivace rozumově nadaných studentů s dyslexií – základní determinanty v období adolescence a časné dospělosti“. Tento projekt se zaměřoval na problematiku mimořádně nadaných adolescentů a mladých dospělých se souběžnou vývojovou poruchou učení – s dyslexií. Podle současných poznatků je právě tato skupina nadaných studentů ve značně znevýhodňující vzdělávací pozici, která jí často znemožňuje dosahovat úspěchů ve škole i v životě. Hlavním cílem projektu bylo sledování klíčových proměnných, které mohou být zodpovědné za tento stav.

V rámci projektu byly vyšetřeny řádově stovky studentů. Zaměříme se na data o 166 studentech bez dyslexie a s diagnostikovanou dyslexií, u nichž byla změřena inteligence Ravenovým testem (maximální skóre je 60 bodů, za nadané jsou považováni studenti se skóre aspoň 56 bodů) a kteří vyplnili dotazník zaměřený na tyto aspekty:

- **vědomí vlastní účinnosti** (přesvědčení jedince, že dokáže úspěšně realizovat chování, které je potřebné k dosažení specifických cílů), výsledky jsou zaznamenány v proměnné skóre H, která může nabývat hodnot od 10 do 40;

- **osobní standardy** (tendence dávat si vysoké cíle a hodnotit se v závislosti na jejich dosažení), výsledky jsou obsaženy v proměnné skóre PS, minimální hodnota může být 7, maximální 35;

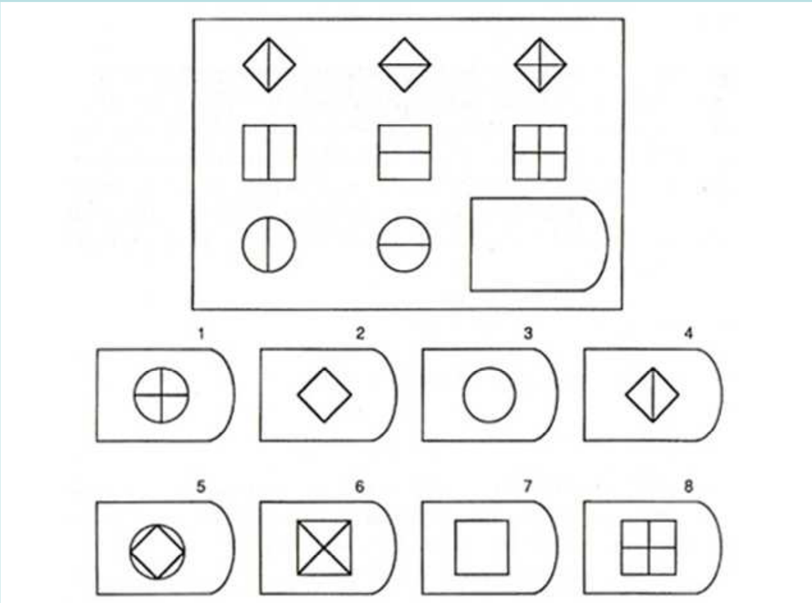
- **organizovanost** (ukazuje na schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech), výsledky jsou shrnuty v proměnné skóre O, může nabývat hodnot mezi 6 až 30;

- **potřeba poznávat**, výsledky jsou zaznamenány v proměnné skóre G, která se může pohybovat v mezích -64 až 64.

Poznámka k Ravenovu testu:

Základem testu jsou matice diagramů 3 x 3, do které se doplňuje chybějící diagram ve třetí řadě na základě logických souvislostí. Podstatou tohoto testu je měření obecné intelektuální schopnosti pracovat s abstraktními pojmy.

Ukázka Ravenovy matice:



Celý výzkumný soubor 166 studentů je rozčleněn na čtyři skupiny:

- nadaní studenti s dyslexií (n_1 = 16, označení ND),
- nadaní studenti bez dyslexie (n_2 = 40, označení NnD),
- průměrní studenti s dyslexií (n_3 = 22, označení PD),
- průměrní studenti bez dyslexie (n_4 = 88, označení PnD).

Metodami MANOVY zjistíme, zda na hladině významnosti 0,05 existují významné rozdíly mezi uvedenými čtyřmi skupinami studentů a identifikujeme proměnné, které tyto rozdíly způsobují.

Ukázka části datového souboru:

	1 Pohlaví	2 Raven	3 ID	4 skoreH	5 skorePS	6 skoreO	7 **skoreG**
1	žena	60	nadany dyslektik	28	15	18	-13
2	muž	59	nadany dyslektik	28	26	17	-1
3	žena	59	nadany dyslektik	25	16	11	5
4	muž	58	nadany dyslektik	24	21	15	10
5	muž	57	nadany dyslektik	34	15	19	12
6	žena	57	nadany dyslektik	30	28	20	14
7	žena	58	nadany dyslektik	23	17	17	18
8	žena	57	nadany dyslektik	30	22	14	18
9	žena	57	nadany dyslektik	32	27	21	19
10	žena	57	nadany dyslektik	33	31	14	20
11	žena	60	nadany dyslektik	22	17	14	22

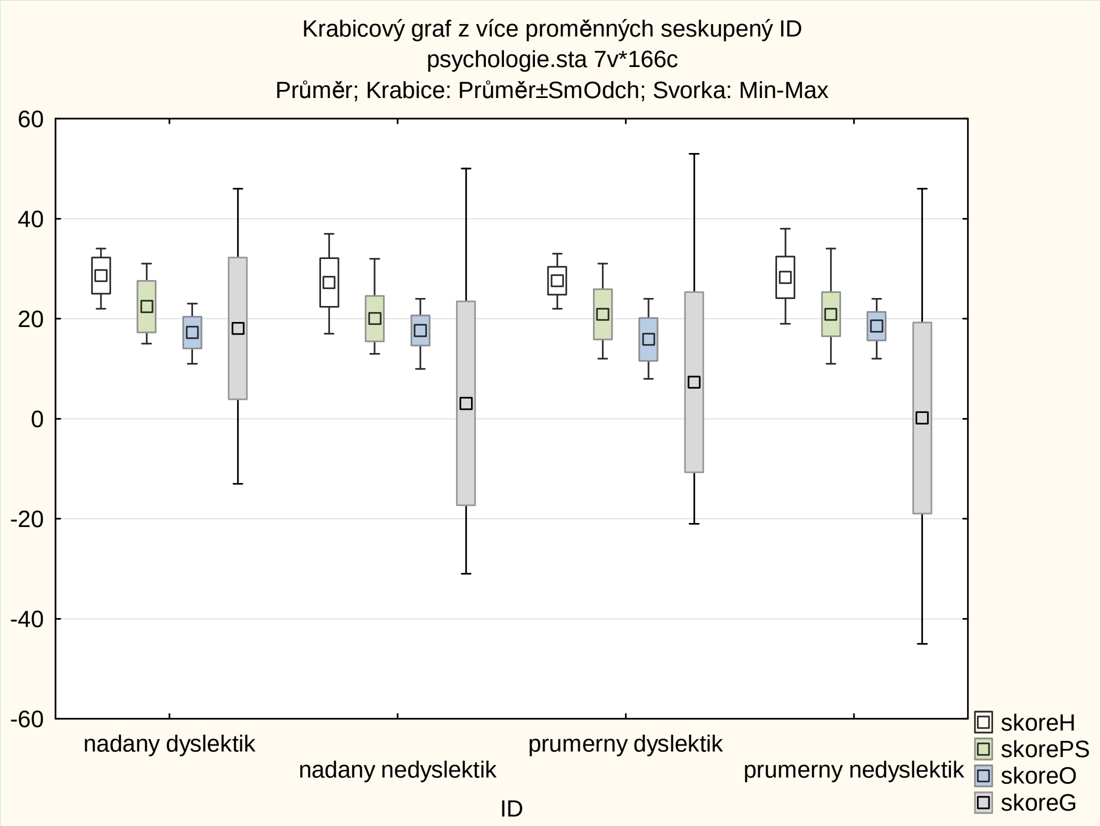
Posouzení úrovně a variability sledovaných proměnných v daných čtyřech skupinách:

Proměnná	Souhrnné výsledky Popisné statistiky (psychologie.sta) ID	N platných	Průměr	Sm.odch.
skoreH	nadany dyslektik	16	28,62500	3,61248
skorePS	nadany dyslektik	16	22,43750	5,15065
skoreO	nadany dyslektik	16	17,25000	3,17280
skoreG	nadany dyslektik	16	18,06250	14,17260
skoreH	nadany nedyslektik	40	27,25000	4,85561
skorePS	nadany nedyslektik	40	20,00000	4,53477
skoreO	nadany nedyslektik	40	17,65000	3,00043
skoreG	nadany nedyslektik	40	3,07500	20,38525
skoreH	prumerny dyslektik	22	27,63636	2,78680
skorePS	prumerny dyslektik	22	20,86364	5,00757
skoreO	prumerny dyslektik	22	15,86364	4,31272
skoreG	prumerny dyslektik	22	7,31818	18,00102
skoreH	prumerny nedyslektik	88	28,28409	4,16595
skorePS	prumerny nedyslektik	88	20,88636	4,42935
skoreO	prumerny nedyslektik	88	18,53409	2,84443
skoreG	prumerny nedyslektik	88	0,15909	19,10581

Průměry proměnných skóre H a skóre PS se u různých skupin příliš neliší. Průměr skóre O je poněkud nižší ve skupině průměrných dyslektiků. Největší rozdíly mezi průměry jsou pozorovatelné u skóre G, kde se velmi výrazně odlišují nadaní dyslektici a průměrní studenti bez dyslexie.

Z hlediska variability se nejvyrovnanější jeví průměrní dyslektici ve vědomí vlastní účinnosti (skóre H), naopak největší proměnlivost pozorujeme u nadaných nedyslektiků v potřebě poznání (skóre G).

Výpočty doplníme krabicovými grafy:



Ověření předpokladů MANOVY

Normalita: Nejprve pomocí S-W testu ověříme předpoklad o normalitě rozložení proměnných skóre H, skóre PS, skóre O, skóre G ve všech čtyřech skupinách.

	Souhrnné výsledky Testy normality (psychologie.sta)			
Proměnná	ID	N	W	p
skoreH	nadany dyslektik	16	0,943706	0,396906
skorePS	nadany dyslektik	16	0,920708	0,173164
skoreO	nadany dyslektik	16	0,974538	0,905670
skoreG	nadany dyslektik	16	0,984604	0,989658
skoreH	nadany nedyslektik	40	0,981282	0,736977
skorePS	nadany nedyslektik	40	0,947461	0,062032
skoreO	nadany nedyslektik	40	0,950792	0,080743
skoreG	nadany nedyslektik	40	0,927833	0,013694
skoreH	prumerny dyslektik	22	0,981058	0,931731
skorePS	prumerny dyslektik	22	0,979518	0,908287
skoreO	prumerny dyslektik	22	0,979293	0,904593
skoreG	prumerny dyslektik	22	0,960403	0,497479
skoreH	prumerny nedyslektik	88	0,983965	0,350405
skorePS	prumerny nedyslektik	88	0,971554	0,049792
skoreO	prumerny nedyslektik	88	0,968818	0,032215
skoreG	prumerny nedyslektik	88	0,989775	0,728066

S-W test zamítá na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě skóre G u nadaných nedyslektiků a dále zamítá hypotézu o normalitě skóre PS a skóre O u průměrných nedyslektiků. Normalita je však porušena jen mírně. Nedopustíme se závažné chyby, budeme-li předpokládat, že každá ze čtyř částí datové matice je realizací výběru ze čtyřrozměrného normálního rozložení.

Shoda variančních matic

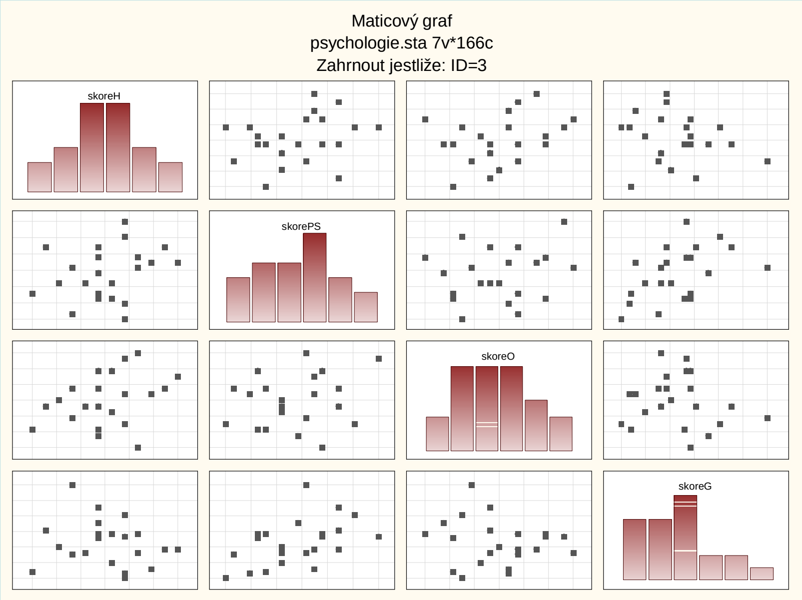
Hypotézu o shodě variančních matic otestujeme Boxovým testem.

	Boxův M test (psychologie.sta) Efekt: ID (Vypočteno pro všechny proměnné)			
	Boxovo M	Chí-kv.	sv	p
Boxovo M	39,90594	37,13662	30	0,173196

Test shody čtyř variančních matic poskytl p-hodnotu 0,1732, tedy nadále budeme varianční matice považovat za shodné.

Linearita vztahů

Linearitu vztahů mezi sledovanými proměnnými v daných čtyřech skupinách orientačně posoudíme pomocí tečkových diagramů. Uvedeme zde výsledky jen pro skupinu průměrných dyslektiků, neboť vzhled tečkových diagramů v ostatních skupinách je podobný:



Výrazné nelinearity se zde neprojevují. Důležité předpoklady MANOVY jsou splněny.

Testování hypotézy o shodě vektorů středních hodnot

Nyní provedeme Wilksův, Pillaiův, Hotellingův a Royův test hypotézy o shodě vektorů středních hodnot.

Efekt	Vícerozměrné testy významnosti (psychologie.sta) Sigma-omezená parametrizace Dekompozice efektivní hypotézy Test	hodnota	F	Efekt sv	Chyba sv	p
Abs. člen	Wilksův	0,01865	2091,936	4	159,0000	0,000000
	Pillaiův	0,98135	2091,936	4	159,0000	0,000000
	Hotellng	52,62732	2091,936	4	159,0000	0,000000
	Royův	52,62732	2091,936	4	159,0000	0,000000
ID	Wilksův	0,82122	2,711	12	420,9660	0,001535
	Pillaiův	0,18498	2,645	12	483,0000	0,001932
	Hotellng	0,21022	2,762	12	473,0000	0,001213
	Royův	0,16843	6,779	4	161,0000	0,000046

Všechny čtyři testy zamítají na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že střední hodnoty proměnných skóre H, skóre PS, skóre O, skóre G jsou ve všech čtyřech skupinách shodné. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že aspoň mezi dvěma skupinami studentů existuje rozdíl z hlediska sledovaných psychologických skóre.

Simultánní testy o složkách vektorů středních hodnot

Dále se pomocí simultánních testů pokusíme odhalit, které proměnné způsobují rozdíly mezi skupinami studentů.

	1 K1	2 K2	3 K3	4 K4	5 kvantil
1	2,21966888	3,21204257	13,0998874	12,5981213	21,0260698

Vidíme, že ani jedna ze čtyř statistik se nerealizuje v kritickém oboru.
Vzhledem k tomu, že hypotéza o shodě vektorů středních hodnot byla na hladině významnosti 0,05 zamítnuta, ale simultánní testy jsou nevýznamné, musí být rozdíly mezi skupinami zapříčiněny nějakou lineární kombinací sledovaných čtyř proměnných.

Vícerozměrná obdoba mnohonásobného porovnávání

Nyní zjistíme, mezi kterými dvojicemi skupin existuje onen významný rozdíl, který byl odhalen při testování hypotézy o shodě vektorů středních hodnot.
Vícerozměrnou obdobu mnohonásobného porovnávání STATISTICA neposkytuje. Problém vyřešíme tak, že provedeme všech šest porovnání (1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4) pomocí Hotellingova T^2 testu a získané p-hodnoty porovnáme s hladinou významnosti korigovanou podle Bonferroniho, tj. s číslem $\alpha \Big/ \binom{r}{2} = \alpha \Big/ \binom{4}{2} = \frac{0{,}05}{6} = 0{,}008\bar{3}$.

Výsledek pro 1. a 2. skupinu:

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: nadany dyslektik; Skup. 2: nadany nedyslektik
Hotellingovo 8,38772 F(4,51)=1,9804 p<,11150

Vypočtenou p-hodnotu (tj. 0,11150) porovnáme s $0{,}008\overline{3}$. Vidíme, že nadaní dyslektici a nadaní nedyslektici se neliší.

Výsledek pro 1. a 3. skupinu:

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: nadany dyslektik; Skup. 2: prumerny dyslektik
Hotellingovo 5,78503 F(4,33)=1,3257 p<,28093

Protože p-hodnota 0,28093 je větší než $0{,}008\overline{3}$, můžeme konstatovat, že nadaní dyslektici a průměrní dyslektici se neliší.

Výsledek pro 1. a 4. skupinu:

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: nadany dyslektik; Skup. 2: prumerny nedyslektik
Hotellingovo 21,4183 F(4,99)=5,1971 p<,00077

V tomto případě vidíme, že nadaní dyslektici a průměrní nedyslektici se liší: $0{,}00077 \leq 0{,}008\overline{3}$

Výsledek pro 2. a 3. skupinu:

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: nadany nedyslektik; Skup. 2: prumerny dyslektik Hotellingovo 5,35556 F(4,57)=1,2719 p<,29168

Při srovnání nadaných nedyslektiků a průměrných dyslektiků nebyly odlišnosti zjištěny, protože příslušná p-hodnota (0,28168) je větší než $0{,}008\overline{3}$.

Výsledek pro 2. a 4. skupinu:

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: nadany nedyslektik; Skup. 2: prumerny nedyslektik Hotellingovo 7,10202 F(4,123)=1,7332 p<,14690

Nadaní a průměrní nedyslektici se neliší na hladině významnosti 0,05.

Výsledek pro 3. a 4. skupinu:

----

t-testy; grupováno: ID (psychologie.sta) Skup. 1: prumerny dyslektik; Skup. 2: prumerny nedyslektik Hotellingovo 18,2551 F(4,105)=4,4370 p<,00236

Zde jsme prokázali, že s rizikem omylu nejvýše 5 % se liší průměrní dyslektici a nedyslektici.

Simultánní testy v mnohonásobném porovnávání

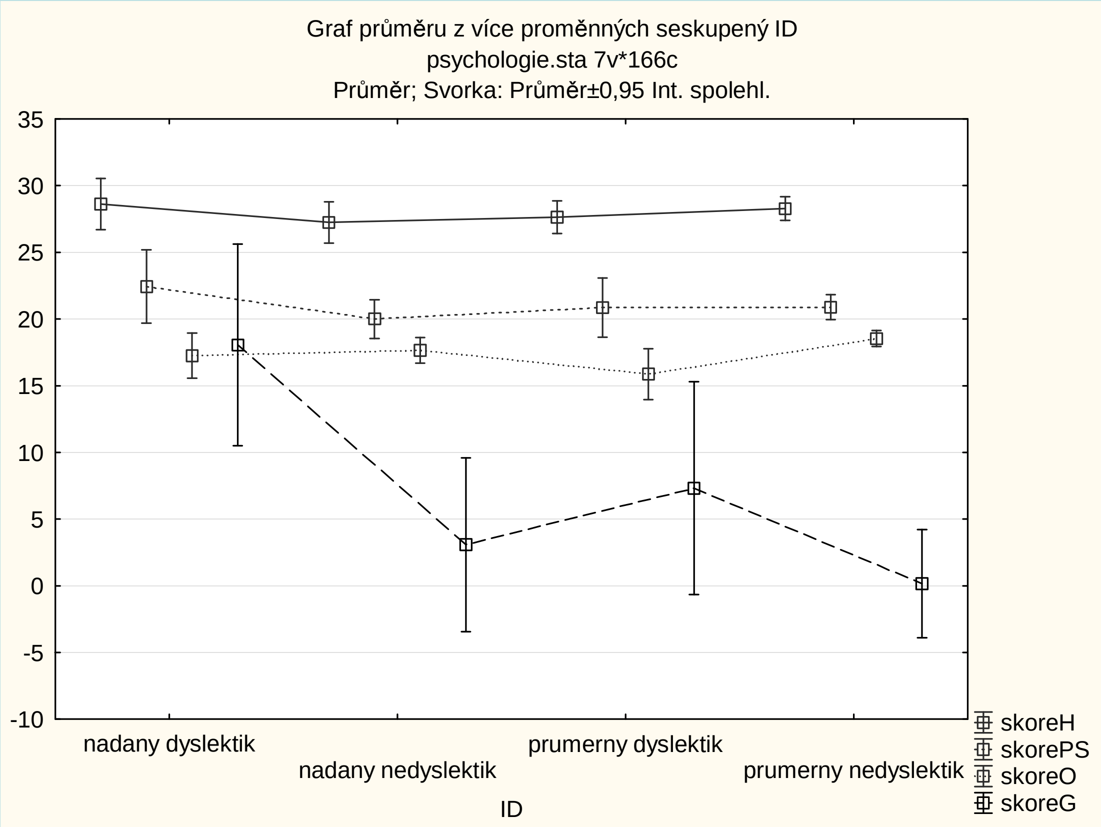
Pro každou proměnnou provedeme dvouvýběrový t-test, abychom ji porovnali ve dvojicích skupin 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-4 a zjistíme, zda vypočtené p-hodnoty jsou menší nebo rovny korigované hladině významnosti $\alpha \Big/ \frac{pr(r-1)}{2} = 0{,}05/24 = 0{,}0021.$

Vypočtené p-hodnoty máme v tabulce:

	skóre H	skóre PS	skóre O	skóre G
ND x NnD	0,3109	0,0861	0,6592	0,0096
ND x PD	0,3469	0,3508	0,2839	0,0554
ND x PnD	0,7597	0,2118	0,1058	0,0006
NnD x PD	0,7330	0,4920	0,0604	0,4176
NnD x PnD	0,2191	0,2996	0,1116	0,4347
PD x PnD	0,4914	0,9833	0,0006	0,1149

Na základě této tabulky můžeme konstatovat, že:
- nadaní dyslektici a průměrní nedyslektici se liší ve skóre G (nadaní dyslektici vykazují vyšší potřebu poznání než průměrní studenti bez dyslexie)
- průměrní dyslektici a průměrní nedyslektici se liší ve skóre O (průměrní dyslektici mají nižší schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech než průměrní studenti bez dyslexie).

Grafické znázornění rozdílů mezi sledovanými proměnnými v rámci čtyř skupin studentů:



Závěr:

Test hypotézy o shodě vektorů středních hodnot prokázal, že s rizikem omylu nejvýše 5 % existují odlišnosti mezi čtyřmi skupinami studentů z hlediska vědomí vlastní účinnosti, osobních standardů, organizovanosti a potřeby poznávání.

Simultánní testy o složkách vektorů středních hodnot ukázaly, že rozdíly mezi skupinami jsou zapříčiněny nějakou lineární kombinací sledovaných čtyř proměnných.

Pomocí vícerozměrné analogie mnohonásobného porovnávání jsme zjistili, že se odlišují nadaní dyslektici a průměrní studenti bez dyslexie a také průměrní studenti bez dyslexie a s dyslexií.

Simultánní testy v mnohonásobném porovnávání odhalily, že nadaní dyslektici vykazují vyšší potřebu poznání než průměrní studenti bez dyslexie a průměrní dyslektici mají nižší schopnost udržovat pořádek a řád ve vlastních věcech než průměrní studenti bez dyslexie.