SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA 1

MARTIN KOLÁŘ

Kapitola 1

Fourierovy řady

1.1 Úvod

1.1.1 Motivační příklad

Z hlediska historie vznikla teorie Fourierových řad ve fyzice, při snaze najít řešení rovnice vedení tepla.

Uvažujme šíření tepla v tenké tyči z homogenního materiálu, kterou modelujeme jako jednorozměrné těleso. Budeme předpokládat že délka tyče je rovna π (toho můžeme vždy dosáhnout volbou jednotek délky). Modelem tyče bude úsečka na reálné ose s hraničními body 0 a π.

Teplotu tyče v počátečním čase $t = 0$ popisuje funkce $u_0(x)$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$, kterou známe. Zajímá nás jak se teplo v tyči šíří pro $t > 0$. Teplotu v bodě x a čase t bude popisovat funkce $u(x, t)$.

Z fyzikálních zákonu plyne, že funkce popisující teplotu splňuje diferenciální rovnici

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) \tag{1.1}$$

pro všechna $x \in (0, \pi)$ a $t > 0$.

K tomu, abychom mohli určit funkci $u(x, t)$ musíme ještě vědět co se děje na koncích tyče. Budeme uvažovat nejjednodušší situaci (z matematického hlediska), kdy na koncích tyče udržujeme stále nulovou teplotu.

Celkem tedy chceme řešit rovnici (1.1), s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

pro $t \geq 0$. Pro některé speciální počáteční podmínky není těžké řešení najít. Je-li

$$u_0(x) = \sin x, \tag{1.2}$$

pak dvojnásobným derivováním podle x dostaneme

$$\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) = -\sin x,$$

tedy původní funkci s opačným znaménkem. Pokud najdeme funkci f proměnné t která při jednonásobném derivováním podle t změní znaménko, bude součin $f(t)\sin x$ zřejmě řešením rovnice. Pokud navíc bude hodnota f v bodě $t = 0$ rovna jedné, bude splňena i počáteční podmínka. Řešení úlohy

$$f'(t) = -f(t), \quad f(0) = 1$$

najdeme snadno, je to funkce

$$f(t) = e^{-t}.$$

Tak jsme našli jedno řešení naší úlohy, se speciální počáteční hodnotou (1.2),

$$u(x,t) = \sin x e^{-t}.$$

Stejnou úvahu můžeme udělat i pro další počáteční hodnoty, tvaru

$$u_0(x) = \sin nx,$$

pro libovolné přirozené číslo n. Máme

$$\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) = -n^2 \sin x,$$

potřebujeme tedy najít funkci splňující

$$f'(t) = -n^2 f(t), \quad f(0) = 1,$$

t.j.

$$f(t) = e^{-n^2 t}.$$

Celkem dostaneme řešení

$$u(x,t) = \sin nx e^{-n^2 t}.$$

Zdá se že jsme se příliš daleko nedostali, máme několik příkladů řešení pro velmi speciální počáteční hodnoty teploty. Teď ale můžeme využít toho, že jak rovnice vedení tepla tak počáteční podmínka jsou lineární. Když tedy bude počáteční teplota konečnou lineární kombinací funkcí $\sin nx$,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx,$$

bude řešení odpovídající kombinací speciálních řešení,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx e^{-n^2 t}.$$

Zůstává otázka jaké funkce je možné vyjádřit jako konečnou lineární kombinaci funkcí $\sin nx$.

Všechno co jsme zatím řekli bylo známo před Fourierovou prací. Fourier uvažoval předchozí argument pro nekonečné lineární kombinace a vyslovil ve své době velmi odvážnou doměnku, že každou funkci splňující $f(0) = f(\pi) = 0$ lze napsat jako nekonečnou lineární kombinaci funkcí $\sin nx$, a obecnou funkci pak jako nekonečnou lineární kombinaci funkcí $\sin nx$ a $\cos nx$. Tak by bylo možné najít obecné řešení rovnice vedení tepla.

Fourierova hypotéza: Každou "rozumnou" funkci na omezeném intervalu lze napsat jako nekonečnou lineární kombinaci funkcí $\sin nx$ a $\cos nx$.

1.1.2 Trigonometrické polynomy a řady

Definice 1.1.1. Trigonomotrický polynom je výraz tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

kde a_n, b_n jsou reálné nebo případně komplexní konstanty. Trigonometrický polynom představuje poměrně jednoduše analyzovatelnou funkci, zadanou konečným počtem konstant. Pomocí těchto funkcí bychom rádi aproximovali libovolně složité funkce.

Částečná analogie této situace je známá ze základů matematické analýzy. Podle Taylorovy věty můžeme každou funkci n-krát diferencovatelnou v bodě x_0 aproximovat v okolí tohoto bodu pomocí Taylorova polynomu stupně n.

Z praktického hlediska má Taylorův polynom dvě nevýhody. Předpoklad n-násobné diferencovatelnosti je značně omezující a často není splněn. Druhým nedostatkem je to že dává pouze lokální aproximaci, na okolí daného bodu, o jehož velikosti nemáme apriori žádnou informaci.

Oba tyto nedostatky odstraňuje tzv. Weierstrassova věta, která dává globální stejnoměrnou aproximaci polynomy pro libovolnou spojitou funkci. Tuto větu dokážeme jako důsledek tvrzení o aproximaci trigonometrickými polynomy.

Vedle trigometrických polynomů nás budou zajímat jejich nekonečné analogie - trigonometrické řady.

Trigonometrická řada je nekonečná funkční řada tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Tuto řadu uvažujeme jako formální řadu a budeme se mimo jiné zajímat otázkami její konvergence. Částečným součtem trigonometrické řady je trigonometrický polynom

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

1.1.3 Komplexní tvar trigonometrických polynomů a řad

Ve řadě případů je jednodušší pracovat s komplexním tvarem trigonometrickéhých polynomů a řad. Klíčem pro převod mezi reálným a komplexním tvarem je Eulerův vzorec pro komplexní exponenciálu

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

pro libovolné $y \in \mathbb{R}$. Existuje řada různých důkazů tohoto vztahu, jedním z nich je důkaz pomocí mocninných řad, který předpokládá znalost Taylorova rozvoje exponenciály. Pro komplexní exponenciálu platí stejný rozvoj do mocninné řady jako pro reálnou, tedy

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

pro libovolné $z \in \mathbb{C}$. Pro $z = iy$ tedy máme

$$e^{iy} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + i(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \ldots) = \cos y + i \sin y.$$

Dosazením do reálného tvaru trigonometrického polynomu

$$\cos nx = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2i}$$

dostaneme komplexní tvar trigonometrického polynomu

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx},$$

kde vztahy mezi koeficienty a_n, b_n a c_n jsou následující. Pro $n > 0$ je

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

pro $n < 0$ je

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}),$$

a

$$c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Stejné vztahy platí pro komplexní tvar trigonometrické řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

1.1.4 Výpočet koeficientů

Nejdříve budeme uvažovat situaci kdy trigonometrická řada konverguje a jejím součtem je $f(x)$. Na prostoru spojitých (reálných nebo komplexních) funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ definujeme skalární součin vztahem

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

který je přímou analogií Euklidovského skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$.

Věta 1.1.2. *Nechť f je součtem trigonometrické řady,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.3}$$

a předpokládejme že řada konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pak pro její koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nxdx \tag{1.4}$$

and

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nxdx \tag{1.5}$$

Důkaz této věty je založen na ortogonálních vlastnostech systému funkcí $\{1, \cos nx, \sin nx\}$, které shrnuje následující lemma.

Lemma 1.1.3. *Systém funkcí $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ je ortogonální systém, t.j. pro libovolné dvě funkce ϕ_1, ϕ_2, navzájem různé, z tohoto systému platí*

$$(\phi_1, \phi_2) = 0.$$

Navíc platí následující vztahy

$$(\cos mx, \cos mx) = (\sin mx, \sin mx) = \pi$$

a $(1,1) = 2\pi$. **Důkaz:** Zřejmě platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\ nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\ nxdx = 0.$$

Odtud máme například

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\ mx \cos\ nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\ (n+m)x + \cos\ (m-n)xdx = 0.$$

Podobně dostaneme ostatní vztahy.

Důkaz Věty 1.1.2. Vztah 1.3 vynásobíme $\cos mx$ a zintegrujeme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx\right)\cos mx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos\ mx\cos\ nx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \sin nx dx =$$

$$= \pi a_m.$$

Záměnna sumy a integrálu je možná díky stejnoměrné konvergenci. Tedy

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

a analogicky pro b_n a a_0.

1.2 Dirichletova věta o bodové konvergenci

Viděli jsme, že za předpokladu stejnoměrné konvergence je vztah mezi součtem trigonometrické řady 1.3 a jejími koeficienty dán vztahy (1.3), (1.4). Z hlediska aplikací taková věta zdaleka nestačí, často chceme analyzovat funkce u kterých víme že konvergence být stejnoměrná nemůže (například u funkcí s jednoduchými nespojitostmi - součtem řady při stejnoměrné konvergenci musí být spojitá funkce).

Teď náš pohled obrátíme. Budeme definovat Fourierovy koeficienty pro co nejširší třídu funkcí, pro než maji integrály (1.3), (1.4) smysl. Pak se budeme zajímat o to za jakých podmínek výsledná řada konverguje a jaký je vztah jejího součtu a původní funkce.

Přirozenou třídou funkcí pro které je (1.3) a (1.4) dobře definováno jsou funkce absolutně integrovatelné. Označíme

$$L^1(\langle -\pi,\pi\rangle)$$

prostor všech funkcí $f(x)$ takových, že

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx < \infty.$$

Je-li $f \in L^1(\langle -\pi,\pi\rangle)$, pak automaticky

$$|f(x)\sin nx| \le |f(x)|,$$

a analogicky pro $f(x)\cos nx$ a $f(x)e^{inx}$. Integrály jsou tedy konečné a Fourierovy koeficienty dobře definované.

Definice 1.2.1. Nechť $f \in L^1(\langle -\pi,\pi\rangle)$. Reálné Fourierovy koeficienty funkce f definujeme vztahy (1.3) a (1.4). Komplexní Fourierovy koeficienty jsou definovány vztahem

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Píšeme $f \sim (a_k, b_k)$ a $f \sim (c_k)$. Formální mocninné řady vzniklé z těchto koeficientů se nazývají (reálná, resp. komplexní) Forierova řada funkce f.

Definice 1.2.2. Funkce f je po částech hladká na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, jestliže existuje dělení tohoto intervalu na konečně mnoho podintervalů tak, že na každém z podintervalů lze f a f' spojitě rozšířit na uzávěr tohoto intervalu.

Pro po částech hladkou funkci jsou dobře definovány jednostranné limity

$$f(x_+) = \lim_{u \to 0_+} f(x+u)$$

a

$$f(x_-) = \lim_{u \to 0_-} f(x+u)$$

pro libovolné $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a analogicky pro f'.

Věta 1.2.3. *(Dirichletova) Nechť f je po částech hladká na $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pak Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě tohoto intervalu k*

$$\frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)].$$

Speciálně, je-li f spojitá v bodě x, pak řada konverguje k $f(x)$.

Důkaz: Nechť (a_k, b_k) jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Chceme dokázat, že

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)].$$

Nejdříve dosadíme za a_k a b_k,

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)dx$$

Použitím trigonometrické identity

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

dostaneme

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right] dt.$$

Ukážeme že pro součet na pravé straně platí

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}.$$

Opravdu, z trigonometricke identity

$$2\sin\frac{u}{2}\cos ku = \sin(k+\frac{1}{2})u - \sin(k-\frac{1}{2})u$$

sečtením přes k dostaneme

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{u}{2}\cos ku = \sin(n+\frac{1}{2})u - \sin\frac{1}{2}u$$

odkud po vydělení $2\sin\frac{u}{2}$ plyne tvrzení. Je tedy

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin(\frac{x-t}{2})}dt.$$

Rozšíříme f na 2π-periodickou funkci na $\mathbb{R}$ a položíme $u = t - x$. Tím se integrál převede na interval $\langle -\pi - x, \pi - x\rangle$. Protože ale integrovaná funkce má periodu 2π, bude jeho hodnota stejná když budeme opět integrovat přes interval $\langle -\pi, \pi\rangle$. Tedy

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}du.$$

Označíme

$$s_n^+(x) = \int_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}du$$

a dokážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n^+(x) = \frac{1}{2}f(x_+).$$

Zcela analogicky se dokáže

$$\lim_{n\to\infty} s_n^-(x) = \frac{1}{2}f(x_-),$$

kde

$$s_n^-(x) = \int_{-\pi}^{0} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}du$$

Víme, že

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}du = \frac{1}{2},$$

neboť v uvažovaném součtu dají všechny členy při integrování nulu, s vyjímkou konstantního členu $\frac{1}{2}$. Vynásobíme obě strany rovnice $f(x_+)$ a odečteme od předchozí rovnice. Dostaneme

$$s_n^-(x) - f(x_+) = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin(\frac{x-t}{2})}[f(x+u) - f(x_+)]du.$$

Ale funkce

$$g(u) = \frac{[f(x+u) - f(x_+)]}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

je po částech spojitá (limita pro $u \to 0$ existuje podle L'Hospitalova pravidla). Tvrzení tedy plyne z Riemann-Lebesgueova lemmatu, které dokážeme později.

1.3 L^2-teorie

V této části budeme uvažovat funkce na obecném intervalu $\langle a, b\rangle$ s hodnotami v $\mathbb{C}$ a prostor

$$L^2(\langle a, b\rangle),$$

obsahující funkce pro které

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

$L^2(\langle a, b\rangle)$ je Hilbertův prostor (nekonečněrozměrná analogie Euklidovského prostoru) se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Skalární součin indukuje stejně jako v Euklidovském prostoru na

$$L^2(\langle a, b\rangle)$$

normu

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

a také metriku. Vzdálenost dvou funkcí je číslo

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definice 1.3.1. Systém funkcí $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá ortogonální systém, jestliže

$$(\phi_n, \phi_m) = 0$$

pro každé $n \neq m$. Nazývá se ortonormální systém, jestliže navíc platí

$$(\phi_n, \phi_n) = 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.3.2. Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je ortonormální systém. Čísla

$$c_k = \int_a^b f(x)\bar{\phi}_k(x) dx$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Formální funkční řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

se nazývá Fourierova řada. Zkladními příklady ortonormálních systému jsou pro nás reálný systém (T) tvořený normalizovanými siny a kosiny, a komplexní systém (E) tvořený komplexními exponenciálami.

Pomocí Fourierových koeficientů definujeme funkce

$$f_N = \sum_{k=0}^{N} c_k \phi_k$$

Našim cílem je zjistit za jakých podmínek konverguje f_N pro $N \to \infty$ k funkci f . Konvergencí v tomto případě rozumíme konvergenci v normě prostoru L^2. Následující lemma ukazuje že f_N je nejlepší aproximací f mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_N$.

Lemma 1.3.3. *Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je ortonormální systém, a $f \in L^2$. Pak pro libovolná komplexní čísla $d_1, \ldots, d_N$ platí*

$$\|f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j\| \geq \|f - f_N\|.$$

Rovnost přitom nastane pouze tehdy, je-li $d_j = c_j$ pro všechna $j = 0, \ldots, N$.

Důkaz: Máme

$$\|f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j\|^2 = (f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j) =$$

$$= (f, f) - (f, \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j) - (\sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, f) + (\sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{N} c_j \bar{d}_j - \sum_{j=0}^{N} \bar{c}_j d_j + \sum_{j=0}^{N} d_j \bar{d}_j =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{j=0}^{N} |c_j - d_j|^2 - \sum_{j=0}^{N} |c_j|^2.$$

První a poslední člen nezávisí na koefientech d_j, prostřední člen je nezáporný a minimalizuje se právě tehdy když $d_j = c_j$ pro $j = 0, \ldots, N$. Tím je tvrzení dokázáno.

Pro $d_k = c_k$ dostaneme z výpočtu v předchozím lemmatu jako důsledek Besselovu identitu

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{N} |c_j|^2 + \|f - \sum_{j=0}^{N} c_j \phi_j\|^2$$

Protože druhý člen na pravé straně je nezáporný, dostáváme pro $N \to \infty$ jako další důsledek nerovnost

$$\sum_{j=0}^{N} |c_j|^2 \leq \|f\|^2.$$

Tedy řada

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2$$

má omezenou posloupnost částečných součtů, která je zřejmě neklesající. Je tedy konvergentní a platí <u>Besselova nerovnost</u>

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|f\|^2.$$

Besselova identita dává důležitou ekvivalentní podmínku pro konvergenci Fourierovy řady k funkci f.

Lemma 1.3.4. *Fourierova řada*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

konverguje v normě L^2 k funkci f právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = \|f\|^2.$$

Důkaz: f_N konvergují k funkci f v L^2 právě tehdy, když čísla

$$\|f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j\|^2$$

konvergují k nule pro $N \to \infty$. Podle Besselovy identity je to ekvivalentí tomu, že platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = \|f\|^2.$$

Připomeňme si že v každém prostoru se skalárním součinem platí Cauchy-Schwartzova nerovnost. Pro každé dvě funkce $f, g \in L^2(\langle a, b \rangle)$ platí

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Důsledkem Cauchy-Schwartzovy nerovnosti je následující lemma o spojitosti skalárního součinu (v metrice kterou indukuje).

Lemma 1.3.5. *Nechť $f_n \to f$ a $g_n \to g$ pro $n \to \infty$ v L^2. Pak*

$$(f_n, g_n) \to (f, g).$$

Důkaz: Máme

$$(f_n, g_n) = (f + f_n - f, g + g_n - g) =$$
$$= (f, g) + (f_n - f, g) + (f, g_n - g) + (f_n - f, g_n - g) \to (f, g)$$

pro $n \to \infty$, protože

$$|(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\| \|g\| \to 0$$

pro $n \to \infty$ podle Cauchy-Schwartzovy nerovnosti, a analogicky pro další dva členy.

Věta 1.3.6. *(Rieszova-Fischerova) Nechť $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost taková, že*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_k|^2$$

konverguje. Pak existuje funkce jejíž Fourierovy koeficienty jsou rovny c_k a řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

konverguje k f v normě L^2.

Důkaz: L^2 je úplný metrický prostor, platí v něm tedy Bolzano - Cauchyho podmínka, posloupnost konverguje právě tehdy, když platí

$$\int_a^b |f_n - f_m|^2 dx \to 0$$

pro $n, m \to \infty$. V našem případě je

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

tedy pro $n > m$ je

$$\int_a^b |f_n - f_m|^2 dx = \sum_{n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0$$

pro $n, m \to \infty$, protože číselná řada $\sum_0^\infty |c_k|^2$ konverguje, a splňuje tedy Bolzano-Cauchyho podmínku pro posloupnosti reálných čísel. Existuje tedy funkce $f \in L^2$ tak, že $f_n \to f$ v L^2 . Zbývá dokázat, že (c_k) jsou Fourierovy koeicienty funkce. To je obsahem následujícího lemmatu.

Lemma 1.3.7. *Nechť*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \to f$$

pro $n \to \infty$ v L^2. Pak $\sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$ je Fourierova řada funkce, t.j. c_n jsou Fourierovy koeficienty f.

Důkaz: Je

$$\int_a^b f \bar{\phi}_m dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \bar{\phi}_m dx = \lim_{n \to \infty} c_m = c_m,$$

podle lemmatu 1.3.5.

1.4 Úplnost a Parsevalova rovnost

Definice 1.4.1. Ornonormální systém $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá úplný, jestliže platí: pokud je pro nějakou funkci $(f, \phi_n) = 0$ pro vsechna n, pak $f = 0$. Neexistuje tedy nenulová funkce kolmá na všechny ϕ_n. **Věta 1.4.2.** *Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém a (c_k) jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Pak*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

konverguje v normě L^2 k funkci f a platí tedy Parsevalova rovnost

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = \|f\|^2.$$

Důkaz: Víme, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < \infty,$$

podle Besselovy nerovnosti. Funkce f je tedy rovna funkci z Riesz-Fischerovy věty. Z úplnosti systému totiž plyne že koeficienty (c_k) určují f jednoznačně. Je-li také $g \sim (c_k)$, pak $(f - g) \sim (0)$, a tedy $f = g$.

Věta 1.4.3. *Nechť f a g jsou funkce z L^2, kde $f \sim (c_k)$ $g \sim (d_k)$. Pak platí*

$$\int_a^b f\bar{g}\, dx = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j.$$

Tedy zobrazení $f \to (c_k)$ z L^2 do l^2 je izomorfismus (zachovává skalární součin).

Důkaz: Je

$$\int_a^b f_n \bar{g} dx = \sum_{j=0}^{n} c_m \int_a^b \phi_m \bar{g}\, dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \bar{d}_j.$$

Ale pro $n \to \infty$ je $f_n \to f$ v L^2 a pravá strana konverguje k $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j$. Celkem tedy

$$\int_a^b f\bar{g} dx = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j.$$

1.4.1 Úplnost a uzavřenost

Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je systém funkcí z L^2 . Označme $\langle\phi_k\rangle$ prostor všech konečných lineárních kombinací funkcí z $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$, t.j.

$$g \in \langle\phi_k\rangle \ \Leftrightarrow g = \sum_{k=0}^{n} d_k\phi_k$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $d_k \in \mathbb{C}$.

Definice 1.4.4. Systém $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá uzavřený jestliže $\langle\phi_k\rangle$ je hustý podprostor L^2.

Věta 1.4.5. $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *je úplný právě tehdy když je uzavřený.*

Důkaz: Tvrzení stačí dokázat pro ortonormální systém, neboť každý systém lze ortonormalizovat. Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný systém a $f \in L^2$. Podle Věty 1.4.2. je

$$f_n \to f$$

v L^2, ale $f_n \in \langle\phi_k\rangle$, tedy $\langle\phi_k\rangle$ je hustý.

Naopak, nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je hustý a $f \in L^2$ má všechny Fourierovy koeficienty rovny nule, t.j. $(f, \phi_n) = 0$ pro všechna n. Z hustoty plyne existence posloupnosti funkcí $\Phi_n \in \langle\phi_k\rangle$ tak, že $\Phi_n \to f$ v L^2, t.j. $\|\Phi_n - f\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Ale f_n jsou nejlepší aproximací, tedy i $f_n \to f$. Ale $f_n = 0$, tedy i $\|f\| = 0$. Odtud plyne, že $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný systém.

Uzavřenost, a tedy i úplnost systémů (T) a (E) dokážeme později, jako aplikaci Fejérovy věty.

1.5 Symetrické operátory a ortogonální systémy.

V této části ukážeme nejčastější původ ortogonálních systémů funkcí, jako systému vlastních funkcí nějakého symerického diferenciálního operátoru.

Funkce $\cos kx$ a $\sin kx$ z trigonometrického systému (T) řeší diferenciální rovnici

$$y'' = -k^2 y,$$

jsou to tedy vlastní funkce diferenciálního operátoru $\frac{d^2}{dx^2}$ příslušné vlastnímu číslu $-k^2$.

Obecněji, nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem ,) a $L : V \to V$ je lineární zobrazení. Přitom definiční obor L nemusí být celé V. Nenulová funkce $f \in V$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ , pokud

$$Lf = \lambda f.$$

L je symetrický operátor, je-li

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

pro každé $f, g \in V$ pro než je L definován.

Příklad 1.5.1. Nechť $L = \frac{d^2}{dx^2}$. Jako definiční obor L uvažujme $C^2(\langle -\pi, \pi \rangle)$. Chceme zjistit zda je L symetrický operátor. L bude symetrický, je-li $(Lf, g) = (f, Lg)$, tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g''(x)dx.$$

Po dvojnásobné integraci per partes dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g''(x)dx +$$

$$+ f'(\pi)g(\pi) - f'(-\pi)g(-\pi) - f(\pi)g'(\pi) + f(\pi)g'(\pi).$$

L tedy bude symetrický, pokud omezíme definiční obor na podprostor na kterém jsou zintegrované členy na posledním řádku rovny nule. Můžeme tedy například požadovat splnění Dirichletovy podmínky v koncových bodech intervalu,

$$h(\pi) = h(-\pi) = 0.$$

Tuto podmínku splňují také funkce $\sin kx$. Nebo splnění Neumannovy podmínky,

$$h'(\pi) = h'(-\pi) = 0,$$

kterou splňují funkce $\cos kx$. Následující věta popisuje souvislost symetrických operátorů s ortogonálními systémy.

Věta 1.5.2. *Nechť L je symetrický lineární operátor definovaný na vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Jsou-li f_1, f_2 vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům λ_1, λ_2, pak f_1, f_2 jsou ortogonální.*

Důkaz: Nechť $Lf_1 = \lambda_1 f_1$ a $Lf_2 = \lambda_2 f_2$. Je

$$(Lf_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2) = \lambda_1 (f_1, f_2)$$

a

$$(f_1, Lf_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2).$$

Ze symetričnosti jsou si obě hodnoty rovny. Ale $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tedy $(f_1, f_2) = 0$.

1.5.1 Sturmův-Liouvilleův operátor

Uvažujme teď Sturmův-Liouvilleův operátor

$$Lf = (pf')' + qf,$$

kde p je jednou spojitě diferencovatelná a q je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jako speciální případ pro $p \equiv 1$ a $q \equiv 0$ dostaneme $L = \frac{d^2}{dx^2}$.

Zajímá nás opět kdy bude L symetrický. Po dvojnásobném integrování per partes dostaneme

$$(Lf,g) = \int_a^b ((pf')' + qf)g dx = \int_a^b ((pg')' + qg)f dx + pf'g|_a^b - pg'f|_a^b.$$

Musíme se tedy omezit na funkce splňující

$$p(f'g - g'f)|_a^b = 0.$$

Na rozdíl od předchozího operátoru může být podmínka splněna vždy, pokud je $p(a) = p(b) = 0$. Tak tomu bude v následujícím příkladu.

1.5.2 Legendreovy polynomy

Uvažujme speciální případ Sturmova-Liouvilleova operátoru

$$Lf(x) = (1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x),$$

který dostaneme pro $p(x) = 1 - x^2$ a $q(x) = 0$. Tedy L je symetrický operátor na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ bez hraničních podmínek, neboť $p(1) = p(-1) = 0$.

Hledání vlastních funkcí vede na řešení Legendreovy rovnice indexu n,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Přímým výpočtem lze ověřit že jejím řešením jsou Legendreovy polynomy

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

P_n je tedy vlastní funkce operátoru L odpovídající vlastnímu číslu $-n(n+1)$. Tedy podle Věty 1.6.2. tvoří Legendreovy polynomy ortogonální systém .

Opět přímým výpočtem dostaneme

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

tedy funkce

$$\phi_n(x)\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$$

tvoří ortonormální systém.

Nejlepší aproximací v prostoru L^2 funkce f mezi všemi polynomy stupně n je tedy polynom

$$\sum_{k=0}^n c_k P_k(x),$$

kde

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx.$$

1.6 Fejérova věta

Od obecné teorie se vrátíme zpět ke konkrétní situaci trigonometrických řad na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Je-li $f \sim (c_k)$, označíme

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

částečný součet Fourierovy řady

Víme, že s_n je nejlepší aproximací f v L^2, ale nemusí bodově konvergovat k f. Ukážeme, že existuje lepší volba trigonometrického polynomu, pro kterou dostaneme konvergenci (dokonce stejnoměrnou) pro libovolnou spojitou funkci.

1.6.1 Cesárovy součty

Lemma 1.6.1. *(i) Je-li $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel a $S_n \to S$ pro $n \to \infty$ pak také posloupnost aritmetických průměrů*

$$A_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j$$

konverguje k S.

(ii) Existuje posloupnost $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ která nemá limitu taková že posloupnost $A_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j$ limitu má.

Důkaz: (i) Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Odhadneme

$$|(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j) - S| = \frac{1}{n+1} |\sum_{j=0}^{n} (S_j - S)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |S_j - S|.$$

Víme, že existuje $N(\varepsilon)$ tak, že $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n > N(\varepsilon)$. Označme

$$A = \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)} |S_j - S|.$$

Existuje $M(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$ tak, že

$$\frac{2A}{\varepsilon} < M(\varepsilon).$$

Pro $n > M(\varepsilon)$ je

$$\frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{N(\varepsilon)} |S_j - S| + \sum_{j=N(\varepsilon)+1}^{n} |S_j - S| \right) < \frac{A}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je je první část tvrzení dokázána.

(ii) Příkladem posloupnosti která nekonverguje, ale má konvergentní posloupnost aritmetických průměrů je

$$S_n = (-1)^n.$$

Posloupnost aritmetických průměrů je totiž rovna buď 0 nebo $\frac{1}{n+1}$, tedy

$$|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

pro $n \to \infty$.

1.6.2 Fejérova věta

Vrátíme se zpět k trigonometrické řadě a po inspiraci z Lemmatu 1.7.1. označíme

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\left(s_0(x) + \ldots + s_n(x)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x).$$

Po dosazení za s_n je vidět, že σ_n je vlastně vážený průměr funkcí e^{ikx}, kde větší hodnoty frekvence k mají menší váhu než nižší frekvence.

Věta 1.6.2. (Fejérova) *Nechť f je spojitá funkce na $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pak $\sigma_n(x)$ konvergují k $f(x)$ stejnoměrně na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.*

Důkaz: Postupujeme podobně jako v důkazu Dirichletovy věty, nejdříve dosadíme za c_k,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} c_k e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n}\frac{n+1-|k|}{n+1}e^{-ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\right)dt,$$

kde

$$K_n(s) = \sum_{k=-n}^{n}\frac{n+1-|k|}{n+1}e^{-iks}$$

je tzv. Fejérovo jádro. Jeho vlastnosti odvodíme ve dvou pomocných lemmatech.
Lemma 1.6.3. *Platí*

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}}\right)$$

pro $s \neq 0$ a

$$K_n(0) = n + 1.$$

Důkaz: Pro $s \neq 0$ máme

$$\sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)e^{iks} = \left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right)^2$$

neboť pro $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$(\lambda^{-n} + \lambda^{-n+1} + \ldots + \lambda^{-1} + 1 + \lambda + \ldots \lambda^n)^2 =$$

$$= \lambda^{2n} + 2\lambda^{-2n+1} + \ldots + (2n+1)1 + \ldots + \lambda^{2n},$$

kde v našem případě je $\lambda = e^{\frac{is}{2}}$. Dále máme (součtem geometrické řady)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})s} \right)^2 = \left(e^{\frac{-ins}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{iks} \right)^2 = \left(e^{\frac{-ins}{2}} \frac{1-e^{i(n+1)s}}{1-e^{is}} \right)^2$$

Po rozšíření výrazem $e^{\frac{-is}{2}}$ dostaneme

$$\left(\frac{e^{\frac{-i(n+1)s}{2}} - e^{\frac{i(n+1)s}{2}}}{e^{\frac{-is}{2}} - e^{\frac{is}{2}}} \right)^2 = \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}} \right)^2$$

Druhá vlastnost plyne přímo z definice. Tím je lemma dokázáno.

Lemma 1.6.4. K_n *má následující vlastnosti:*

(i) $K_n(s) \geq 0$

(ii) $K_n(s) \to 0$ *stejnoměrně na doplňku* $\langle -\delta, \delta \rangle$ *pro každé* $\delta > 0$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)ds = 2\pi$

Důkaz: První tvrzení je zřejmé. Pro důkaz druhého odhadneme

$$K_n(s) \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sin\frac{s}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \right)^2 \to 0$$

pro $n \to \infty$. Třetí tvrzení plyne ze vztahu

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1}((n+1)1 + n\cos x + i\sin x + \ldots).$$

Všechny členy s vyjímkou prvního dávají nulový integrál, tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)ds = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = 2\pi.$$

Dokončení důkazu Fejérovy věty: Nechť $\epsilon > 0$ je dáno. f je spojitá na kompaktním intervalu, je tedy omezená, t.j. existuje $M > 0$ tak že $|f(s)| \leq M$ pro každé

$s \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Dále ze spojitosti na kompaktní množině plyne stejnoměrná spojitost, t.j. existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pro $|s - t| < \delta$. Vezměme takové δ . Podle (ii) existuje N tak, že

$$|K_n(s)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

pro $s \notin \langle -\delta, \delta \rangle$ a $n \geq N$. Máme

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) K_n(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(s) ds| =$$

$$= |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-s) - f(x)] K_n(s) ds| \leq |\frac{1}{2\pi} \int_{s \in \langle -\delta, \delta \rangle} [f(x-s) - f(x)] K_n(s) ds| +$$

$$+ |\frac{1}{2\pi} \int_{s \notin \langle -\delta, \delta \rangle} [f(x-s) - f(x)] K_n(s) ds| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\langle -\delta, \delta \rangle} |K_n(s)| ds + \frac{2M}{2\pi} \int_{s \notin \langle -\delta, \delta \rangle} |K_n(s)| ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds + \frac{2M}{2\pi} \int_{s \notin \langle -\delta, \delta \rangle} \frac{\varepsilon}{4M} ds \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno tvrzení o konvergenci. Stejnoměrná konvergence plyne z nezávislosti předchozího odhadu na x. Prvním důsledkem Fejérovy věty je existence libovolně přesné aproximace spojitých funkcí trigonometrickými polynomy.

Věta 1.6.5. *Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje trigonometrický polynom P tak, že*

$$\sup_{x \in \langle -\pi, \pi \rangle} |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Důkaz: Za $P(x)$ vezmeme $\sigma_n(x)$ pro dostatečně velké n.

Jinak řečeno, trigonometrické polynomy jsou husté v prostoru spojitých funkcí v supremové normě.

Dalším důležitým důsledkem je Weierstrassova věta

Věta 1.6.6. *(Weierstrassova) Nechť $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existuje polynom P takový, že*

$$\sup_{\langle a,b \rangle} |P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Větu zřejmě stačí dokázat pro interval $\langle 0, 1 \rangle$, protože lze transformovat na pomocí lineární transformace, která zachovává polynomy. Nejdříve odvodíme dvě pomocná lemmata.

Lemma 1.6.7. *Nechť f je spojitá funkce na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a nechť je f sudá. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \geq 1$ a čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tak, že*

$$\sup_{\langle -\pi,\pi\rangle} |f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx| < \epsilon.$$

Důkaz: f je sudá, tedy $b_k = 0$ a σ_n obsahuje jen kosiny. Lemma tedy plyne z Fejérovy věty.

Lemma 1.6.8. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje reálný polynom T_n tak, že*

$$\cos nx = T_n(\cos x), \qquad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

Důkaz: Indukcí. Tvrzení platí pro $n = 0$ a $n = 1$, kdy vezmeme $T_0(t) = 1, T_1(t) = t$. Předpokládejme že platí pro každé $n < m$ kde $m \geq 2$. Pak

$$\cos mx = \cos mx - \cos(m-2)x + \cos(m-2)x =$$

$$= \cos\left((m-1)x + x\right) + \cos\left((m-1)x - x\right) - \cos(m-2)x = 2\cos x \cos(m-1)x - \cos(m-2)x = T_m($$

kde

$$T_m(t) = 2tT_{m-1}(t) - T_{m-2}(t).$$

Odtud plyne že T_m má požadovaný tvar **Důkaz Weierstrassovy věty** Nechť $f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá a $\varepsilon > 0$ je dáno. Definujme $g : \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{C}$ předpisem

$$g(t) = f(|\cos t|)$$

pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Funkce g je spojitá a $g(t) = g(-t)$. Víme, že existuje $n \geq 1$ a $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\sup_{t \in \langle -\pi,\pi\rangle} |g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt| < \varepsilon.$$

Ale

$$g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt = f(|\cos t|) - \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos t)$$

pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, tedy

$$\sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x) - a_k T_k(x)| \leq \sup_{0 \leq t \leq \pi} |f(|\cos t|) - \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos t)| < \varepsilon.$$

Hledaný polynom je tedy $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$, neboť

$$\sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

1.7 Gibbsův jev

Uvažujme funkci

$$h(x) = x \text{ pro } x \in (-\pi, \pi)$$
$$h(\pi) = h(-\pi) = 0$$

rozšířenou na 2π periodickou funkci na $\mathbb{R}$. Její rozvoj do Fourierovy řady má tvar

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx.$$

V bodech nespojitosti této funkce dochází k překmitu částečného součtu Fourierovy řady o hodnotu která se pro zvětšující se n nezmenšuje. Přesně tento jev popisuje následující věta.

Věta 1.7.1. *Nechť s_n jsou částečné součty Fourierovy řady funkce $h(x)$. Pak*

$$s_n(\pi - \frac{\pi}{n}) \to A\pi$$

a

$$s_n(\pi + \frac{\pi}{n}) \to -A\pi$$

pro $n \to \infty$, kde

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1.17.$$

Důkaz:

Máme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx.$$

Tedy

$$s_n(\pi - \frac{\pi}{n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin k(\pi - \frac{\pi}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \sin k\frac{\pi}{n} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} (\frac{n}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n}).$$

Poslední výraz je přibližným součtem z definice Riemannova integrálu, pro funkci $\frac{\sin x}{x}$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ příslušnou rovnoměrnému rozdělení na intervaly délky $\frac{\pi}{n}$. Tedy pro $n \to \infty$ konverguje k

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Podobně se dokáže, že

$$s_n(-\pi + \frac{\pi}{n}) \to -2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Přímým výpočtem ověříme nerovnost

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1.17.$$

Kapitola 2

Fourierova transformace

2.1 Definice a základní vlastnosti

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce z $L^1(\mathbb{R})$. Pro $\xi \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Pro každé ξ je integrál konečný, protože $|f(x)e^{-i\xi x}| = |f(x)|$ a tedy $f(x)e^{-i\xi x} \in L^1(\mathbb{R})$.

Definice 2.1.1. Funkce $\hat{f}(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se nazývá Fourierova transformace funkce $f(x)$.

Lemma 2.1.2. *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ je omezená funkce. Pak $\hat{f}$ je spojitá.*

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. $|f|$ je integrovatelná, tedy existuje $R(\varepsilon)$ dostatečně velké, tak, že

$$\int_{|t| \geq R(\varepsilon)} |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Na druhé straně, f je omezená, tedy existuje K tak, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-i\xi t} - e^{-i\eta t})| \leq$$

$$\leq |\int_{|t| \geq R(\varepsilon)} f(t)(e^{-i\xi t} - e^{-i\eta t}) dt| + |\int_{-R(\varepsilon)}^{R(\varepsilon)} f(t)(e^{-i\xi t} - e^{-i\eta t}) dt|$$

$$\leq 2 \int_{|t| \geq R(\varepsilon)} |f(t)| dt + 2R(\varepsilon) \sup_{t \in \langle -R(\varepsilon), R(\varepsilon) \rangle} f(t)(e^{-i\xi t} - e^{-i\eta t}) dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2R(\varepsilon)K \sup_{t \in \langle -R(\varepsilon), R(\varepsilon) \rangle} |e^{-i\xi t} - e^{-i\eta t}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2R(\varepsilon)K \sup_{t \in \langle -R(\varepsilon), R(\varepsilon) \rangle} |\xi t - \eta t|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4R(\varepsilon)^2 K |\xi - \eta| \leq \varepsilon$$

je-li
$$|\xi-\eta| \le \frac{\varepsilon}{8R(\varepsilon)^2K+1}.$$

Na druhé straně, Fourierova transformace nemusí být integrovatelná.

Lemma 2.1.3. *Nechť $f(x)=1$ pro $x\in\langle -1,1\rangle$ a $f=0$ jinak. Pak*
$$\hat f(\xi)=\frac{2\sin\xi}{\xi}$$
a $f\notin L^1(\mathbb{R})$, t.j. $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\xi)|d\xi$ diverguje.

Důkaz: Z definice
$$\hat f(\xi)=\int_{-1}^{1}e^{-i\xi t dt}=\left[\frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi}=2\frac{\sin\xi}{\xi}.$$
Integrál z této funkce diverguje.

2.1.1 Základní vlastnosti Fourierovy transformace

Z linearity integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární operace. Pro každé dvě funkce f,g a konstanty a,b tedy platí
$$(\widehat{af+bg})=a\hat f+b\hat g.$$

Lemma 2.1.4. *(O změně měřítka) Pro $f\in L^1\cap\ C$ a $R>0$ označme $f_R(x)=f(Rx)$. Pak*
$$\widehat{f_R}(\xi)=\frac{1}{R}\hat f(\frac{\xi}{R}).$$

Důkaz: Z definice
$$\widehat{f_R}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f_R(x)e^{-i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(Rx)e^{-i\xi x}dx.$$
Substitucí $y=Rx$ dostaneme
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}y}\frac{1}{R}dy=\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}y}dy=\frac{1}{R}\hat f(\frac{\xi}{R}).$$
Tím je lemma dokázáno.

Lemma 2.1.5. *(O Fourierově transformaci derivace). Nechť $f\in L^1\cap\ C$, $f'\in L^1\cap\ C$ a $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Pak*
$$\widehat{(f')}(\xi)=i\xi\hat f(\xi).$$

Tedy derivování se převádí na násobení.

Důkaz: Integrováním per partes dostaneme

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dx = [e^{-i\xi x}f(x)]_{-\infty}^{\infty} - (-i\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Obecně, je-li $f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^1 \cap\ C$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f^j(x) = 0$ pro $j = 0, 1, \ldots, k-1$, pak k-násobným integrováním per partes dostaneme

$$\widehat{(f^{(k)})}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Lemma 2.1.6. *(O derivaci Fourierovy transformace) Nechť $f \in L^1 \cap\ C$ a $g(x) = xf(x) \in L^1 \cap\ C$. Pak $\hat{f}(\xi)$ je diferencovatelná a platí*

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi} = -i\hat{g}(\xi).$$

Důkaz: Derivováním vztahu

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

podle parametru ξ dostaneme

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-i\xi x}dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)x]\, e^{-i\xi x}dx = -i\hat{g}(\xi).$$

Další důležitou a často používanou operací je konvoluce. Pro $f, g \in L^1$ je jejich konvoluce definována vztahem

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Substitucí $y' = x - y$ dostaneme alternativní vyjádření

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = g * f(x).$$

Konvoluce je tedy komutativní operace.

Lemma 2.1.7. *(O Fourierově transformaci konvoluce) Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Důkaz: S použitím Fubiniho věty dostaneme

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy)e^{-i\xi x}dx =$$

$$= \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} f(x-y)g(y)dydx = \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi(x-y)} f(x-y)e^{-i\xi y}g(y)dydx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} f(x-y)dx \right) e^{-i\xi y} g(y)dy = \hat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} g(y)dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Lemma 2.1.8. *(O transformaci posunutí a o posunutí transformace) Nechť $f \in L^1 \cap C$. Pro $a > 0$ označme $f_a(x) = f(x-a)$. Pak*

$$\hat{f}_a(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}.$$

Naopak,

$$\widehat{fe^{iax}}(\xi) = \hat{f}(\xi - a).$$

Důkaz: Na jedné straně substitucí $y = x - a$ dostaneme

$$\hat{f}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)}dy = e^{-ia\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy =$$

$$= e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi).$$

Naopak,

$$\widehat{fe^{iax}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x}dx = \hat{f}(\xi - a).$$

Důsledek 2.1.9. (Modulační identity) Nechť Fourierova transformace funkce $f(x)$ je $F(\xi)$. Pak Fourierova transformace funkce $f(x)\sin \omega x$ je rovna

$$\frac{i}{2}[F(\xi + \omega) - F(\xi - \omega)].$$

Důkaz: Víme, že

$$\sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

a

$$\widehat{f(x)e^{i\omega x}}(\xi) = \hat{F}(\xi - \omega).$$

Tedy

$$f\widehat{(x)\sin}\omega x(\xi) = \frac{1}{2i}[F(\xi - \omega) - F(\xi + \omega)] = \frac{i}{2}[F(\xi + \omega) - F(\xi - \omega)].$$

Lemma 2.1.10. *(Fourierova transformace Gaussovy funkce) Je-li $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, pak*

$$\hat{f}(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{2}}.$$

Důkaz: Označme opět $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Máme

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{\frac{-x^2}{2}} = -xf(x).$$

Na jedné straně je

$$(\widehat{-xf(x)}) = \widehat{f}'(\xi) = i\xi F(\xi),$$

podle lemmatu o transformaci derivace Na druhé straně, z lemmatu o derivaci transformace je

$$(\widehat{-ixf})(\xi) = F'(\xi).$$

Tedy celkem F splňuje rovnici

$$F'(\xi) = -\xi F(\xi).$$

Separací proměnných dostaneme řešení

$$F(\xi) = Ce^{\frac{-\xi^2}{2}}.$$

Konstanta C je rovna hodnotě $\hat{f}$ v bodě nula, tedy Laplaceovu integrálu

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1.$$

Tím je lemma dokázáno.

Příklad 2.1.11. Označme jako $H(x)$ Heavisideovu funkci, t.j. $H(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $H(x) = 0$ pro $x < 0$. Je-li

$$f(x) = e^{-ax} H(x)$$

pro nějaké $a > 0$, pak

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a + i\xi}.$$

Opravdu,

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{a+i\xi} [e^{-(a+i\xi)x}]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\xi}.$$

Dále uvažujme funkci

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Pomocí Heavisideovy funkce ji můžeme napsat jako

$$f(x) = H(x)e^{-ax} + H(-x)e^{ax}.$$

Její Fourierova transformace je tedy rovna

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+x^2}.$$

Věta 2.1.12. *(Základní identita pro Fourierovu transformaci) Nechť $f, g \in L^1 \cap C$. Pak platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{g} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}g.$$

Důkaz: Z Fubiniho věty dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dydx =$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)e^{-ixy}dydx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\hat{f}(y)dy.$$

2.2 Věta o inverzní transformaci

K důkazu Věty o inverzní transformaci budeme potřebovat aproximaci identity.

2.2.1 Aproximace identity

Definice 2.2.1. Nechť $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. Pak systém funkcí

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$$

se nazývá aproximací identity příslušnou funkci ϕ

Z definice ihned plyne že pro všechna ε platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

V našem případě vezmeme za ϕ Gaussovu funkci

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

tedy

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Následující lemma odůvodňuje termín aproximace identity.

Lemma 2.2.2. *Nechť ϕ_ε je aproximace identity a f je spojitá omezená funkce na $\mathbb{R}$. Pak $f * \phi_\varepsilon(x)$ konverguje (stejnoměrně na kompaktních intervalech) k $f(x)$ pro $\varepsilon \to 0$.*

Důkaz: Nechť $|f(x)| \le M$ pro $x \in \mathbb{R}$. Máme

$$|f*\phi_\varepsilon(x) - f(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)]\phi_\varepsilon(y)dy| = |\int_{-\infty}^{\infty} [f(x-\varepsilon y') - f(x)]\phi(y')dy',$$

kde jsme použili substituci $y = \varepsilon y'$. Nechť $\delta > 0$ je dáno. Vezměme R tak velké, že $\int_{y \notin \langle -R,R \rangle} \phi(y)dy < \delta$, a dále $\varepsilon > 0$ tak, aby

$$|f(x - \varepsilon y) - f(x)| < \delta$$

pro $y \in \langle -R, R \rangle$. Máme tedy

$$|\int_{-\infty}^{\infty} [f(x - \varepsilon y') - f(x)]\phi(x)dy \leq |\int_{\langle -R,R \rangle} [f(x - \varepsilon y') - f(x)]|+$$

$$+|\int_{y \notin \langle -R,R \rangle} [f(x - \varepsilon y') - f(x)]\phi(x)dy| \leq \delta 1 + (2M + 1)\delta = (2M + 1)\delta.$$

Tedy $f * \phi_\varepsilon(x) \to f(x)$ pro $\varepsilon \to 0$. Z nezávislosti odhadu na x plyne stejnoměrná konvergence na kompaktních intervalech.

2.2.2 Věta o inverzní transformaci

Věta 2.2.3. *Nechť $f \in L^1 \cap C$, f je stejnoměrne spojitá a $\hat{f} \in L^1 \cap C$. Pak*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Důkaz: Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolný pevně zvolený bod a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x - \varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}}$$

Víme, že

$$\hat{\phi}(y) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}},$$

tedy

$$\hat{\phi}(y) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{2\pi} g(\frac{x - y}{\varepsilon}),$$

kde

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Budeme uvažovat aproximaci identity příslušnou této funkci a použijeme základní identitu pro Fourierovu transformaci na funkce f a ϕ. Na jedné straně je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Na druhé straně

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{\phi} = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\varepsilon(x - y)dy = \sqrt{2\pi} f * g_\varepsilon(x).$$

Víme, že $f * g_\varepsilon(x) \to f(x)$ stejnoměrně na kompaktech. Ale pro x pevné je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)$$

pro $\varepsilon \to 0$, neboť první člen pod integrálem konverguje k jedné. Celkem tedy pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Definice 2.2.4. Inverzní Fourierova transformace je definována vztahem

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} d\xi.$$

Podle předchozí věty je inverzní Fourierova transformace opravdu inverzní operací k Fourierově transformaci, platí tedy

$$\check{(\hat{f})} = f.$$

2.3 Korelace a autokorelace

Definice 2.3.1. Nechť f, g patří do $L^1 \cap C$. Definujeme korelaci funkcí f a g vztahem

$$f \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(y) g(y+x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(y-x) g(y) dy.$$

Z definice je zřejmé že korelace má velmi blízký vztak ke konvoluci, definované jako

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y) g(x+y) dy.$$

Z druhého vyjadření je vidět že platí vztah

$$f(x) \circ g(x) = \bar{f}(-x) * g(x).$$

Víme, že

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$$

a dále $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$ a $\widehat{f(-x)}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$, tedy

$$\widehat{\overline{f(-x)}}(\xi) = \bar{\hat{f}}(\xi).$$

Celkem tedy platí

$$\widehat{(f \circ g)} = \bar{\hat{f}}\hat{g}.$$

Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Lemma 2.3.2. *Je-li $F = \hat{f}$ a $G = \hat{g}$, pak*

$$\widehat{(f \circ g)} = \bar{F}G.$$

Definice 2.3.3. $f \circ f$ se nazývá autokorelace funkce f.

Důsledkem předchozího lemmatu je následující

Lemma 2.3.4. *(Autokorelační identita) Nechť $f \in L^1 \cap C$ a $\hat{f} = F$. Pak platí*

$$\widehat{(f \circ f)} = |F|^2.$$

2.4 Fourierova transformace funkcí z L^2

2.4.1 Parsevalova rovnost a Plancherelova věta

V této části dokážeme Parsevalovu rovnost. $||f||$ lze napsat dvěma způsoby. Na jedné straně máme

$$f \circ f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = ||f||^2.$$

Na druhé straně

$$\widehat{(|f|^2)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 e^{-i0x} dx = ||f||^2.$$

Z autokorelační identity dostaneme vztah mezi f a $\hat{f}$,

$$\widehat{f \circ f}(\xi) = |\hat{f}|^2(\xi).$$

Na tuto rovnici použijeme inverzní Fourierovu transformaci a dostaneme

$$f \circ f(x) = (|\check{\hat{f}}|^2)(x)$$

Do rovnice dosadíme nulu. Levá strana dává

$$f \circ f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

a pravá

$$(|\check{\hat{f}}|^2)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2 e^{ix0} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2.$$

Celkem jsme tedy dokázali následující tvrzení.

Věta 2.4.1. *(Parsevalova rovnost) Nechť $f, \hat{f} \in L^1 \cap C$. Pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2 dx.$$

Tedy zobrazení P které f přiřadí $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ je izometrie.

2.5 Centrální limitní věta

Jednou z důležitých aplikací Fourierovy transformace je odvození centrální limitní věty.

Věta 2.5.1. *(Lindebergova) Nechť X_i, $i = 1, 2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou pravděpodobnosti f, kde $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$. Nechť $E(X_i) = 0$ a $E(X_i^2) = 1$. Pak hustota pravděpodobnosti $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ se blíží k hustotě standartizovaného normálního rozdělení, t.j.*

$$Pr\{a \leq \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

pro $n \to \infty$.

K důkazu budeme potřebovat dvě pomocná lemmata.

Lemma 2.5.2. *Nechť f je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Pak $\hat{f}^{(k)}(0)$ existuje právě tehdy když existuje k-tý obecný moment a platí*

$$\hat{f}^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = (-i)^k M_k,$$

kde M_k je k-tý obecný moment nahodné veličiny X.

Důkaz:

k-násobným derivováním rovnice

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

podle parametru dostaneme

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} x^k dx$$

a dosazením $\xi = 0$

$$\hat{f}^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = (-i)^k M_k.$$

Tím je lemma dokázáno

Lemma 2.5.3. *Nechť f je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X, kde $EX = 0$ and $EX_i^2 = 1$ a $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$. Pak pro Taylorův rozvoj funkce $\hat{f}$ v bodě 0 platí*

$$\hat{f}(\xi) = 1 - \sigma^2 \frac{\xi^2}{2} + o(|\xi|^2).$$

Důkaz: Plyne z předchozího lemmatu, neboť $M_1 = 0$ a $M_2 = \sigma^2$. Podle Taylorovy věty je tedy

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0) + \hat{f}'(0)\xi + \frac{1}{2}\hat{f}''(0)\xi^2 + o(\xi^2),$$

odkud po dosazení plyne tvrzení.

Důkaz centrální limitní věty. Víme, že $M_0 = 1$, tedy podle předchozího lemmatu je

$$\hat{f}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2} + R(\xi),$$

kde

$$\frac{R(\xi)}{\xi^2} \to 0 \quad \text{pro} \quad \xi \to \infty.$$

Uvažujme teď náhodnou veličinu $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$ pro kterou je $M_1 = E(\frac{X_i}{\sqrt{n}}) = 0$ a

$$M_2 = E(\frac{X_i^2}{n}) = \frac{1}{n}.$$

Označme f_n hustotu pravděpodobnosti $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$. Taylorův rozvoj její Fourierovy transformace je

$$\hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\frac{\xi}{\sqrt{n}}) = 1 - \frac{\xi^2}{2n} + R(\frac{\xi}{\sqrt{n}}),$$

kde

$$\frac{R(\frac{\xi}{\sqrt{n}})}{\frac{\xi^2}{n}} \to 0 \;\; pro \quad \xi \to \infty.$$

Víme, že $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ má hustotu pravděpodobnosti

$$g_n = \underbrace{f_n * f_n * \ldots * f_n}_{n\times},$$

a jejíž Fourierova transformace je

$$\hat{g}_n = (\hat{f}_n)^n.$$

Dosazením dostaneme

$$\hat{g}_n = (1 - \frac{\xi^2}{2n} + R(\frac{\xi}{\sqrt{n}}))^n$$

Pro každé pevné ξ výraz $R(\frac{\xi}{\sqrt{n}})$ je $o(\frac{1}{n})$ a víme, že

$$(1 - \frac{\xi^2}{2n})^n \to e^{-\frac{\xi}{2}}.$$

Tedy

$$g_n(\xi) \to e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Ze spojitosti Fourierovy transformace plyne

$$f_n(x) \to e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

pro $n \to \infty$.

2.6 Princip neurčitosti

V aplikacích se vztah pro inverzní transformaci

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

často nazývá spektrální rozklad funkce (signálu) $f(x)$. Hodnota $|\hat{f}(\xi)|$ je amplituda komponenty $e^{i\xi x}$ ve spektrálním rozkladu funkce f. Druhá mocnina amplitudy má fyzikální interpretaci výkonu. Hodnota $|\hat{f}(\xi)|^2$ se nazývá výkonová spektrální hustota.

Pro $f \in L^2$ označíme

$$E = ||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

V aplikacích představuje E zpravidla nějakou formu energie. Dále označíme

$$\Delta x = \left[\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li $E = 1$, pak $(\Delta x)^2$ je druhý centrální moment náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti $|f(x)|^2$. V každém případě je Δx mírou rozptylu hodnot funkce $f(x)$.

Následující tvrzení uvedeme bez důkazu.

Lemma 2.6.1. *Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pak pro každé $\alpha > 1$ platí*

$$\int_{-\alpha\Delta x}^{\alpha\Delta x} |f(x)|^2 dx \geq \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} E,$$

tedy

$$\int_{-\infty\Delta x}^{-\alpha\Delta x} |f(x)|^2 dx + \int_{\alpha\Delta x}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\alpha^2} E.$$

Například, je-li $E = 1$ a chceme-li lokalizovat energii s přesností 99%, stačí vzít $\frac{1}{\alpha^2} = 0,01$, tedy $\alpha = 10$.

Věta 2.6.2. *(Princip neurčitosti) Nechť $f, \hat{f} \in \mathcal{S}$ a nechť*

$$\Delta x = [\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

a

$$\Delta \xi = [\frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 dx]^{\frac{1}{2}},$$

kde

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Pak

$$\Delta x \Delta \xi \geq \frac{1}{2}.$$

Rovnost přitom platí právě tehdy když

$$f(x) = Ae^{-cx^2}$$

pro nějaké konstanty $A \in \mathbb{R}$ a $c > 0$.

Důkaz: Vyjdeme z identity

$$(f^2(x))' = 2f(x)f'(x).$$

Dále

$$\widehat{(xff')}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x)f'(x)xdx = xf^2(x)|_{\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = -E.$$

Z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti dostaneme

$$E = |\int_{-\infty}^{\infty} 2xf(x)f'(x)dx| \leq 2(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx)^{\frac{1}{2}} = 2\Delta x\sqrt{E}(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Na druhé straně, z Parsevalovy rovnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |i\xi\hat{f}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{f}|^2 = E(\Delta\xi)^2.$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E}(\Delta\xi)^2.$$

Celkem dostáváme

$$E \leq 2\Delta x\sqrt{E}\sqrt{E}\Delta\xi,$$

t.j.

$$\Delta x \Delta \xi \geq \frac{1}{2}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když nastane rovnost v Cauchy-Schwartzově nerovnosti, t.j. když

$$2f(x)x = kf'(x),$$

tedy

$$f(x) = Ae^{-cx^2}$$

pro nějaké konstanty A a c. Tím je tvrzení dokázáno.

Kapitola 3

Fourierova transformace v $\mathbb{R}^n$

3.1 Základní vlastnosti

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je absolutně integrovatelná funkce. Proměnnou v $\mathbb{R}^n$ budeme značit

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

proměnnou Fourierovy transformace $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$. Dále označíme

$$\xi \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_i \xi_i.$$

Budeme používat standartní multiindexové označení.

Definice 3.1.1. Pro $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

Funkce $f(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se nazývá (n-rozměrná) Fourierova transformace funkce f.

3.1.1 Základní vlastnosti Fourierovy transformace

Většina základních vlastností n-rozměrné Fourierovy transformace je zcela analogická odpovídajícím vlastnostem jednorozměrné transformace. Pro jednoduchost budeme všechny vlastnosti dokazovat pro funkce rychle klesající v nekonečnu.

Definice 3.1.2. f je funkce rychle klesající v nekonečnu, neboli funkce Schwartzovy třídy, jestliže pro každé dva multiindexy α, β platí

$$\lim_{|x| \to \infty} |x^\alpha f^{(\beta)}| = 0.$$

Prostor funkcí Schwartzovy třídy označujeme $\mathcal{S}$.

Vícerozměrná Fourierova transformace je lineární, t.j.

$$(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}.$$

Lemma 3.1.3. *(O změně měřítka) Pro $f \in \mathcal{S}$ a $R > 0$ označme $f_R(x) = f(Rx)$. Pak*

$$\widehat{f_R}(\xi) = \frac{1}{R^n}\hat{f}(\frac{\xi}{R}).$$

Důkaz: Substitucí $y = Rx$ dostaneme

$$\widehat{f_R}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_R(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Rx)e^{-i\xi\cdot x}dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}\cdot y}\frac{1}{R^n}dy = \frac{1}{R^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}\cdot y}dy = \frac{1}{R^n}\hat{f}(\frac{\xi}{R}).$$

Tím je lema dokázáno.

Lemma 3.1.4. *(O Fourierově transformaci parciální derivace). Nechť $f \in \mathcal{S}$. Pak*

$$\widehat{(\frac{\partial f}{\partial x_j})}(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi).$$

Tedy parciální derivace se při transformaci převádí na násobení odpovídající komponentou vektoru ξ.

Důkaz:

$$\widehat{(\frac{\partial f}{\partial x_j})}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = (-i\xi_j)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx =$$

$$= i\xi_j\hat{f}(\xi),$$

kdeb druhá rovnost plyne z Greenovy věty a toho že f je rychle klesající funkce.

Obecně, je-li $f \in \mathcal{S}$ a α je multiindex, pak

$$\widehat{(f^{(\alpha)})}(\xi) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\xi).$$

Zvlášť jednoduchý tvar má Fourierova transformace Laplaceova operátoru,

$$\widehat{(\Delta f)}(\xi) = |\xi|^2\hat{f}(\xi).$$

Věta 3.1.5. *(Základní identita pro Fourierovu transformaci) Nechť $f, g \in L^1 \cap C$ Pak platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}g$$

Důkaz: Z Fubiniho věty, analogicky jako v jednorozměrném případě.

3.2 Věta o inverzní transformaci

3.2.1 Věta o inverzní transformaci

Věta 3.2.1. *Nechť $f \in \mathcal{S}$, pak*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Důkaz je analogický jako v $\mathbb{R}^1$.

Definice 3.2.2. Inverzní Fourierova transformace je definována vztahem

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Stejně jako v jednorozměrném případě je inverzní Fourierova transformace opravdu inverzní operací k Fourierově transformaci, platí tedy

$$(\check{\hat{f}}) = f$$

3.3 Řešení rovnice vedení tepla na přímce

Jak jsme se zmínili v úvodu, jednou z důležitých aplikací Fourierovy analýzy je řešení diferenciálních rovnic.

Chceme řešit rovnici vedení tepla na přímce, t.j.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$. $u(x,t)$ je teplota v bodě x a čase t. Teplota tyče v počátečním čase je známa, daná počáteční podmínkou

$$u(x,0) = \psi(x).$$

Pro každé pevné $t > 0$ budeme uvažovat Fourierovu transformaci funkce u v proměnné x. Na jedné straně máme

$$\widehat{(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}(\xi,t) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi,t),$$

na druhé straně t hraje při integraci roli parametru, tedy je

$$\widehat{(\frac{\partial u}{\partial t})}(\xi,t) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t).$$

Transformovaná rovnice má tedy tvar

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Pro pevné ξ je to obyčejná diferenciální rovnice v proměnné t, kterou umíme vyřešit,

$$\hat{u}(\xi, t) = Ce^{-\xi^2 t}$$

kde $C = \hat{u}(\xi, 0)$, tedy

$$C = \hat{\psi}(\xi).$$

Celkem

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\psi}(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

Zpětnou transformací, podle pravidla o transformaci konvoluce dostaneme

$$u(x, t) = (\psi * G_t)(x, t),$$

kde $G_t(x)$ je zpětná transformace funkce $e^{-\xi t}$. Tu najdeme ze znalosti transformace Gaussovy funkce a lemmatu o transformaci po změně měřítka, kde vezmeme $R = \sqrt{4\pi t}$. Tak dostaneme

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Řešení počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla má tedy tvar

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \psi(y) dy.$$

Kapitola 4

Zobecněná Fourierova transformace

V této kapitole ukážeme jak je možné přirozeným způsobem rozšířit Fourierovu transformaci na velmi širokou třídu funkci a navíc i na zobecněné funkce, tzv. distribuce.

4.1 Testovací funkce a distribuce

Definice 4.1.1. Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R})$ hladkých funkcí s kompaktním nosičem nazýváme prostor testovacích funkcí.

Definice 4.1.2. Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá distribuce.

Je-li g distribuce pak její hodnotu na testovací funkci ϕ označujeme

$$g(\phi) = \langle g, \phi \rangle.$$

Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Přiřadíme jí jednoznačně určenou distribuci, kterou budeme označovat stejným písmenem, předpisem

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

Hodnota na testovací funkci je tedy obyčejný skalární součin těchto dvou funkcí.

Naopak, jsou-li f, g dvě různé funkce pak se snadno dokáže že jim odpovídající distribuce musí být také různé. Můžeme tedy spojité funkce ztotožňovat s příslušnou distribucí.

4.2 Operace na distribucích

Ukážeme jak je možné operace definované na prostoru testovacích funkcí rozšířit na distribuce. Uvažujme operátor $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R})$ a předpokládejme že k němu existuje adjungovaný operátor T^*, takový, že

$$(Tf, g) = (f, T^*g)$$

pro každé dvě funkce f, g z $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Pak můžeme definovat rozšíření operátoru T na prostor distribucí. Je-li f distribuce, definujeme distribuci Tf vztahem

$$\langle Tf, \phi \rangle = \langle f, T^*g \rangle.$$

Například, je-li operátor derivování, t.j. $T = \frac{d}{dx}$, máme integrováním per partes

$$(\frac{df}{dx}, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} g dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg}{dx} g dx = (f, T^*g),$$

neboť zintegrovaný člen $fg|_{-\infty}^{\infty}$ je roven nule protože funkce mají kompaktní nosič. Je tedy $T^* = -T$. Derivace distribuce je tedy definována vztahem

$$\langle f', \phi \rangle = \langle f, \phi' \rangle.$$

4.3 Fourierova transformace distribucí

Je-li T operátor Fourierovy transformace, t.j. $Tf = \hat{f}$, víme ze základní identity že pro $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{g} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}g$$

a tedy $T^* = T$. Můžeme tedy definovat Fourierovu transformaci pro libovolnou distribuci.

Definice 4.3.1. Nechť f je distribuce. Definujeme její Fourierovu transformaci vztahem

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle.$$

Odvodíme teď zobecnnou Fourierovu transformaci některých důležitých funkcí. Je-li $f = 1$, dostaneme z definice

$$\langle \hat{1}, \phi \rangle = \langle 1, \hat{\phi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi} = \hat{\hat{\phi}}(0) = 2\pi\phi(0) = 2\pi\delta_0,$$

kde δ_0 je Diracova delta funkce v nule. Podobně odvodíme Fourierovu transformaci mocninné funkce a tím libovolného polynomu.