



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

II. PRINCIPY TOHO, JAK NA TO?

POKRAČOVÁNÍ



NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

VÝKONOVÝ EXKURZ:

střední výkon periodické veličiny:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a^2(t) dt$$

neperiodická veličina je taková periodická veličina, jejíž perioda $T_0 \rightarrow \infty$

střední výkon neperiodické veličiny

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a^2(t) dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \cdot E$$

je-li $E < \infty$, pak $P \rightarrow 0$ (nezajímavé);

$E > \infty$, pak $P = \lim \infty / \infty = K \in \langle 0, \infty \rangle$!

$= \rightarrow \infty$

NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ spektrální hustota výkonu:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{S_{xx}(f)}{T_0}$$

- ☑ Wiener-Khinchinovy vztahy:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp(-2\pi j f \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\tau) \cdot \exp(-2\pi j f \tau) \cdot d\tau$$

kde

$$g_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt$$

AKF náhodných stacionárních ergodických procesů

NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ odhad pouze z konečného intervalu

$$\tilde{g}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt$$

- ☑ odhad spektrální hustoty výkonu veličiny známé v konečném intervalu

$$\tilde{G}_{xx}(f) = \dots = \frac{1}{T_0} \left| \int_{T_0} x_a(t) \cdot \exp(-2\pi jft) \cdot dt \right|^2$$

ODHADOVÝ EXKURZ

- ☑ odhad parametru je závislý na volbě úseku analyzované veličiny;
- ☑ protože je výběr intervalu náhodný, je i odhad parametru náhodnou veličinou;
- ☑ základní (požadované) vlastnosti odhadů:
 - **nestrannost** – záruka, že v průměru se bude odhad pohybovat kolem správné hodnoty parametru

$$E\hat{q} = q; \quad \lim_{K \rightarrow \infty} E\hat{q} = q \quad \text{asymptoticky nestranný odhad}$$

- **konzistence** – čím delší bude zkoumaný interval, tím více se bude odhad blížit neznámé hodnotě

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{K \rightarrow \infty} P(\|\hat{q} - q\| > \varepsilon) = 0$$

NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

☑ **DISKRÉTNÍ POSLOUPNOST**

→ vzorkováním veličiny $x_a(t)$ vzorkovací frekvencí

$$F > 2f_{\max};$$

→ výsledná posloupnost $x(nT)$ má N hodnot

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

→ odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T_{vz} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi j f m T_{vz})$$

→ odhady AK posloupnosti:

$$1) \tilde{r}_{xx1}(mT_{vz}) = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$2) \tilde{r}_{xx2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

→ odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T_{vz} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

→ odhady AK posloupnosti:

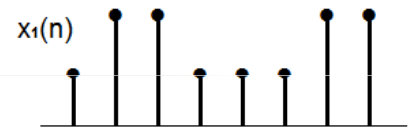
$$1) \quad \tilde{r}_{xx1}(mT_{vz}) = \frac{T_{vz}}{(N-|m|)T_{vz}} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$2) \quad \tilde{r}_{xx2}(mT_{vz}) = \frac{T_{vz}}{NT_{vz}} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

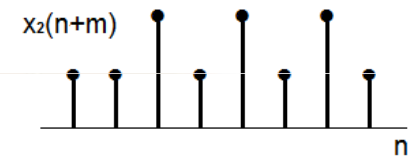
DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



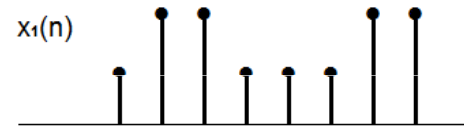
$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



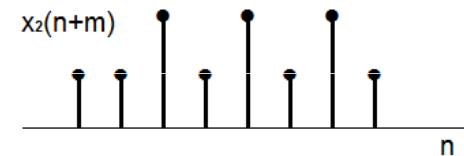
a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



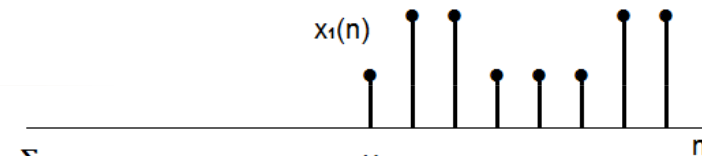
$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



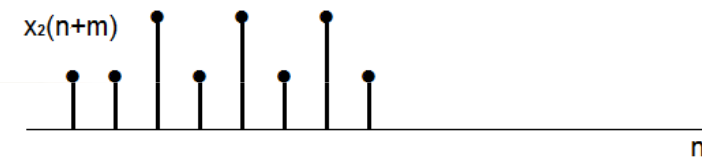
b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad n$



c)

$$\tilde{r}_{xx1}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\tilde{r}_{xx2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) střední hodnota

$$E[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E[x(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})]}_{\gamma_{xx}(mT_{vz})} = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

takhle je definovaná AKF
stacionárního diskrétního
náhodného procesu

tzn. $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$ je nestranný odhad

rozptyl [Jenkins, G.M., Watts, D.G.: Spectral Analysis & Its Application, Holden-Day, 1968]

$$\text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 + \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz})\gamma_{xx}(nT_{vz} + mT_{vz}) \right]$$

je-li $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 < \infty$, je $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) pokračování

Protože $E[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = \gamma_{xx}(mT_{vz})$ a $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$
je odhad $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$ konzistentní

pro velké hodnoty m má odhad $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$ velký rozptyl

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) střední hodnota

$$E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] =$$

$$= \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}(mT_{vz}) = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

$$E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] \neq \gamma_{xx}(mT_{vz}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

$\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})$ je asymptoticky nestranný odhad

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) rozptyl

$$\text{var}[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 + \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz})\gamma_{xx}(nT_{vz} + mT_{vz}) \right]$$

je to menší než pro $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$

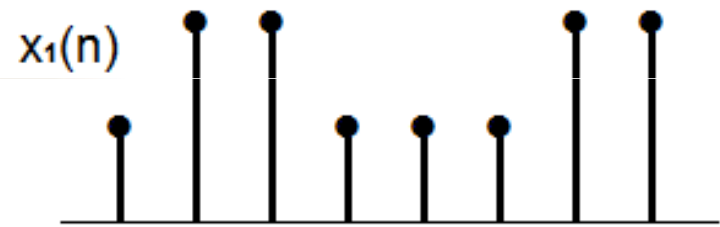
$$\text{je-li } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 < \infty, \text{ je } \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$$

a tak $\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})$ je také konzistentní

KRUHOVÁ DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ -

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



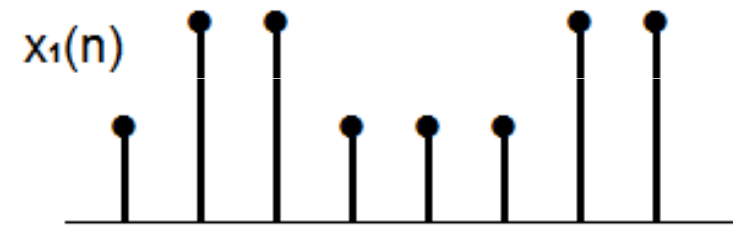
$\Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad n$



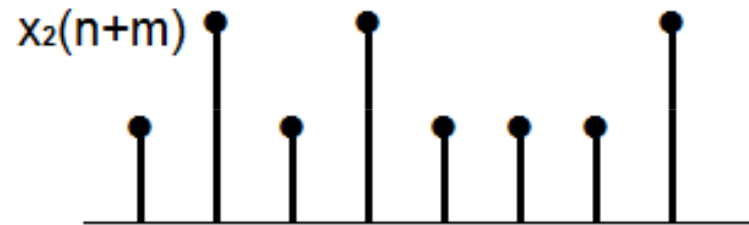
a)

$N = 8; \quad m = 3; \quad N - |m| = 5$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



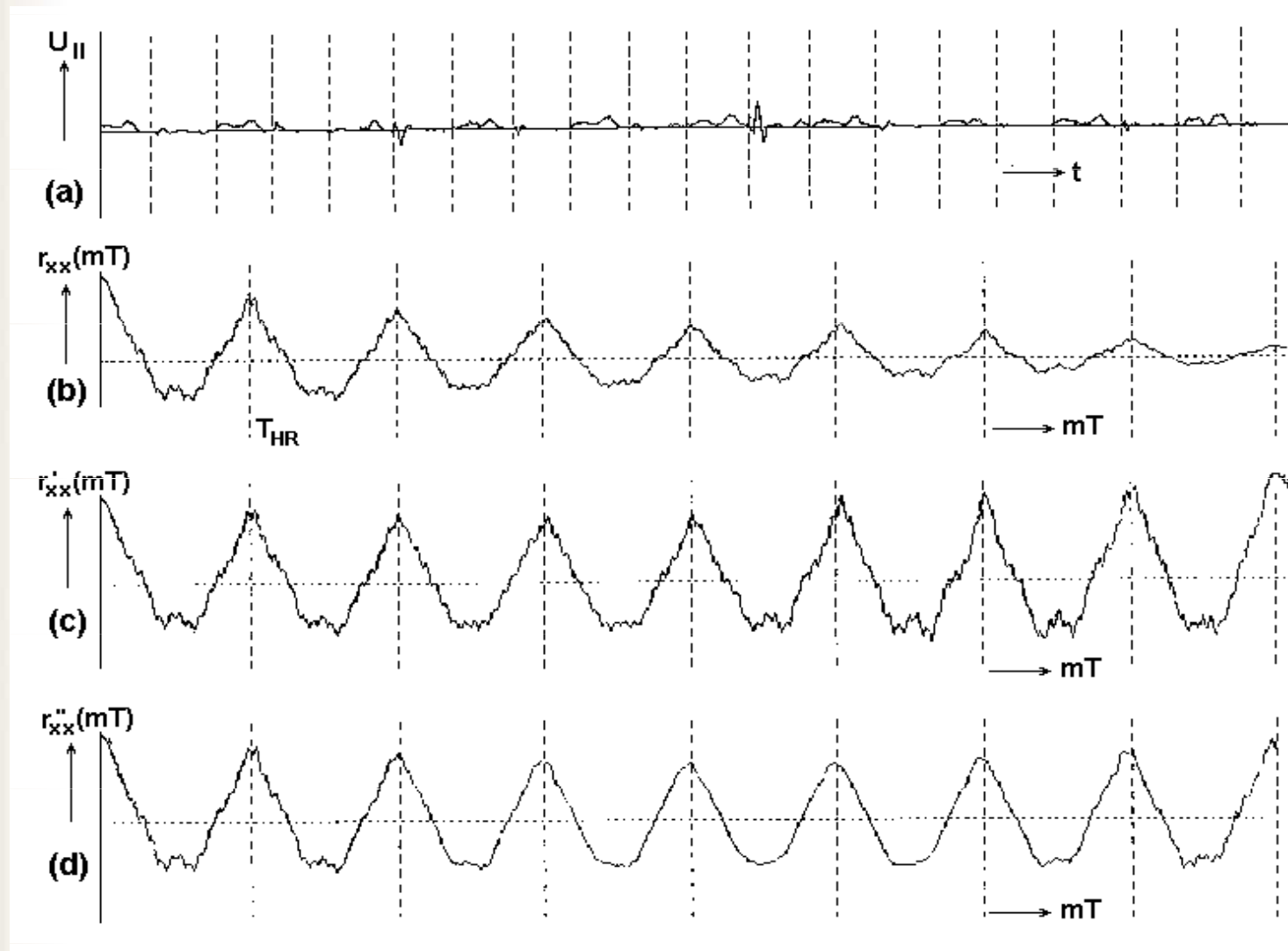
$\Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad n$



b)

DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ

PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA



NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ dosadíme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu za \tilde{r}_{xx} podle 2), dostaneme
- ☑ **periodogram** (Schuster 1898) (přímá metoda)

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{xx}(f) &= \frac{1}{NT_{vz}} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-2\pi jfn) \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2\end{aligned}$$

SIR FRANZ ARTHUR FRIEDRICH SCHUSTER



*12.9.1851 Frankfurt n.M., Německo

†17.10.1934, Berkshire, Anglie

oblasti zájmu: spektroskopie, elektrochemie, optika, X- radiografie, fyzikální aplikace harmonické analýzy; zavedl koncept antihmoty (1898)

spolupracovníci: Gustav Kirchhoff, Herman von Helmholtz, James Clerk Maxwell, 3. baron Rayleigh (John William Strutt), Ernest Rutherford



postřelení Elizabeth Ann Hartleyové, duben 1896

SIR FRANZ ARTHUR FRIEDRICH SCHUSTER



*12.9.1851 Frankfurt n.M., Německo

†17.10.1934, Berkshire, Anglie

oblasti zájmu: spektroskopie, elektrochemie, optika, X- radiografie, fyzikální aplikace harmonické analýzy; zavedl koncept antihmoty (1898)

spolupracovníci: Gustav Kirchhoff, Herman von Helmholtz, James Clerk Maxwell, 3. baron Rayleigh (John William Strutt), **Ernest Rutherford**

„If your experiment needs statistics, you ought to have done a better experiment.“



postřelení Elizabeth Ann Hartleyové, duben 1896

PERIODOGRAM

střední hodnota:

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}(f)] &= E\left[T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx2}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} \right] = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E(\hat{r}_{xx2}(mT_{vz})) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} \end{aligned}$$

střední hodnota periodogramu je dána diskretní Fourierovou transformací skutečné autokorelační funkce váhované trojúhelníkovým Bartlettovým oknem

Bartlettovo okno:

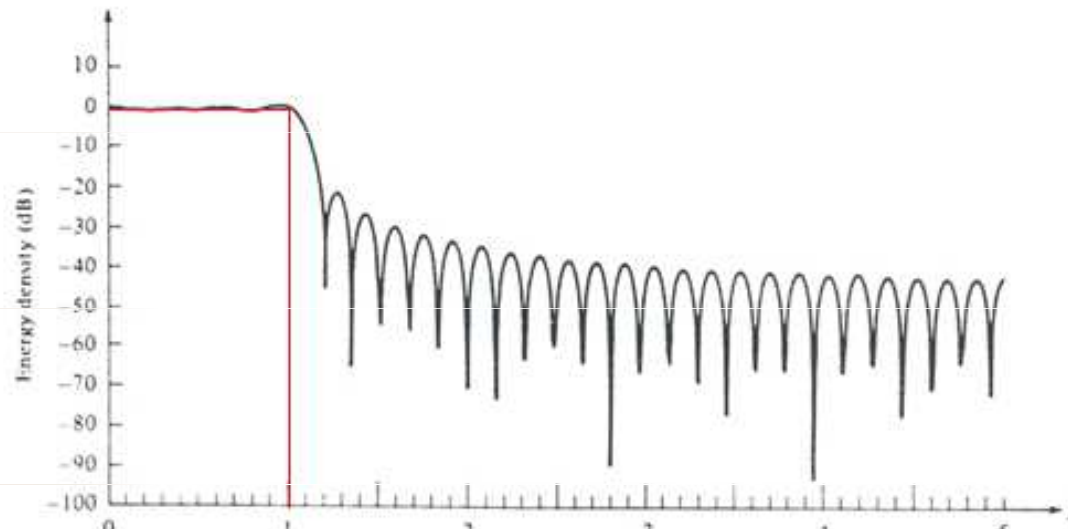
$$w_B(mT_{vz}) = \begin{cases} \frac{N-|m|}{N}, & \text{pro } |m| \leq N; \\ 0, & \text{pro } |m| > N. \end{cases}$$

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(mT_{vz}) \cdot \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$\Gamma_{xx}(f)$... skutečná spektrální hustota výkonu

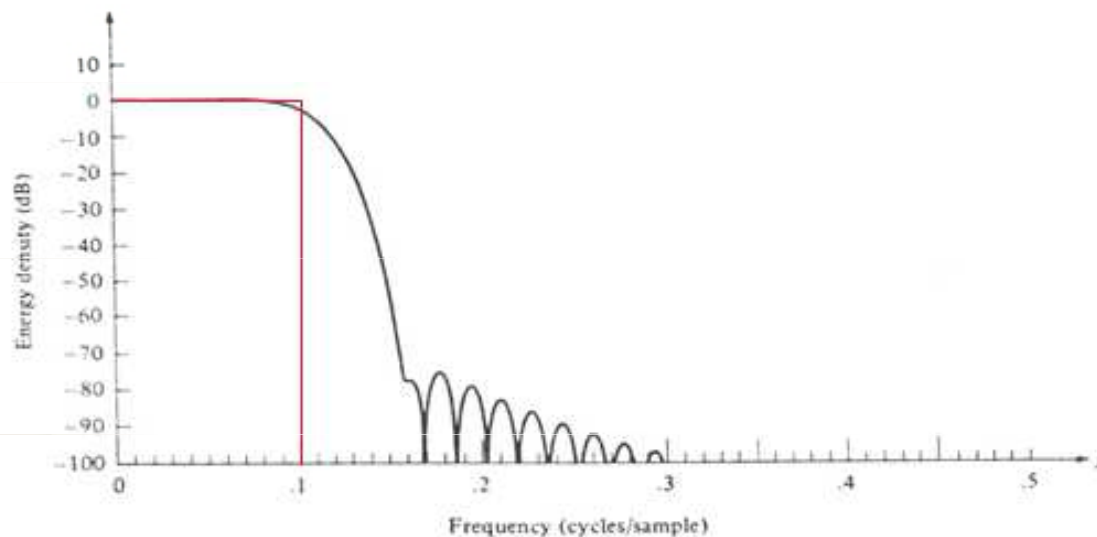
$W_B(f)$... spektrum Bartlettova okna

PERIODOGRAM



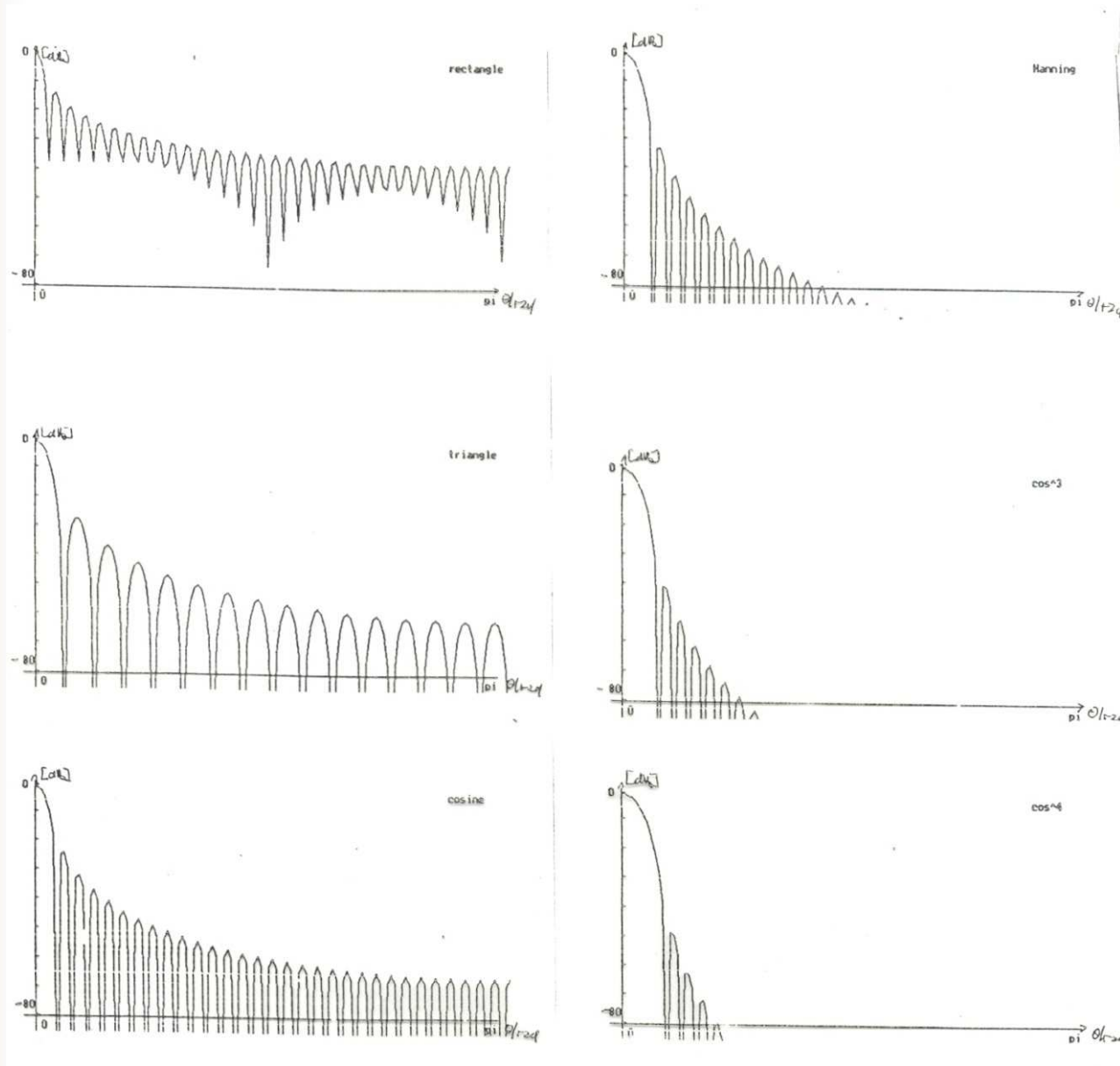
spektrální konvoluce
obdélníkového okna
(ve spektrum)
 $X(f) = 1$ pro $|f| \leq 0,1$;
 $X(f) = 0$ pro $|f| > 0,1$;

a obrazu obdélníka
($N=61$) ...



Blackmanova okna
 $N = 61$

FREKVENČNÍ OKNA



PERIODOGRAM

střední hodnota periodogramu je vyhlazenou verzí skutečného spektra (pozor na znehodnocení spektra postranními laloky $W_B(f)$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left(\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} T_{vz} \left[1 - \frac{|m|}{N} \right] \cdot \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} \right) = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \Gamma_{xx}(f)$$

asymptoticky nestranný odhad

rozptyl obecně nekonverguje k nule při $N \rightarrow \infty$

pro normální rozložení

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \frac{\sin 2\pi f N T_{vz}}{N \cdot \sin 2\pi f T_{vz}} \right], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)$$

ne Konzistentní odhad

PERIODOGRAM

dosadíme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu za \hat{r}_{xx} odhad s proměnnou vahou, je střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = \dots = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}}$$

střední hodnota $\hat{P}_{xx}(f)$ je dána DFT skutečné autokorelační funkce váhované obdélníkovým oknem

$$w_R(mT_{vz}) = \begin{cases} 1, & \text{pro } |m| \leq N; \\ 0, & \text{pro } |m| > N. \end{cases}$$

III. NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

- ☑ nekladou žádné požadavky na znalosti vlastností signálu;
- ☑ všechny uvedené metody vycházejí z konečné posloupnosti vzorků
⇒ frekvenční rozlišovací schopnost je při nejlepším určena spektrální šířkou obdélníkového okna
(všechny metody však snižují frekvenční rozlišení díky snaze o snížení rozptylu spektrálního odhadu)

BARTLETOVA METODA

- ✓ rozdělení posloupnosti N vzorků na K nepřekrývajících se segmentů, každý o délce M
 $x_i(nT_{vz}) = x(nT_{vz} + iMT_{vz}), i=0, 1, \dots, K-1; n=0, 1, \dots, M-1$
- ✓ pro každý segment se spočítá periodogram

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MT_{vz}} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

- ✓ zprůměrněním periodogramů ze všech K segmentů dostaneme odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

?

A jak to bude s rozlišovací schopností?

- a) zůstane stejná;
- b) zvětší se;
- c) zmenší se.

STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

☑ střední hodnota

$$E[\overline{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

pro jednotlivé periodogramy

$$E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} T_{vz} \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} =$$
$$= \frac{1}{M} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot \left(\frac{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot MT_{vz}]}{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot T_{vz}]}\right)^2 d\alpha \quad W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin[\pi f \cdot MT_{vz}]}{\sin[\pi f T_{vz}]}\right)^2$$

omezení délky signálové posloupnosti z N vzorků na $M=N/K$ vzorků způsobí váhování oknem, jehož spektrální šířka vzroste K -krát; tím se též sníží K -krát frekvenční rozlišovací schopnost

STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

☑ rozptyl

$$\text{var}[\bar{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)]$$

rozptyl se sníží K-krát

WELCHOVA METODA

dvě modifikace Bartletovy metody

☑ překrývání segmentů

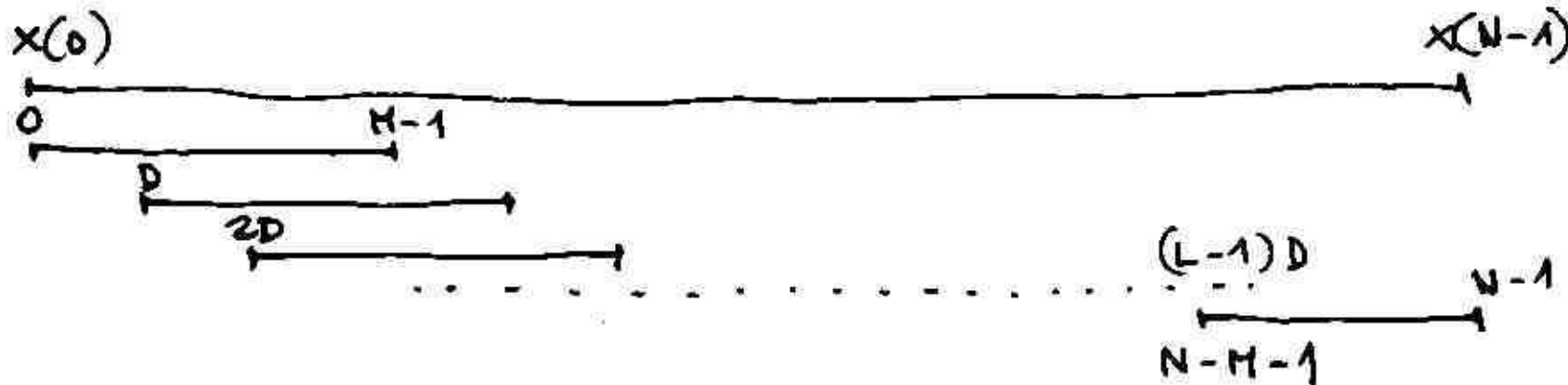
$$x_i(nT_{vz}) = x(nT_{vz} + iT_{vz}),$$

$i=0, 1, \dots, K-1$ (počet segmentů);

$n=0, 1, \dots, M-1$ (počet vzorků v segmentu)

D je posun okna; L je počet segmentů

pro $D=M$ se segmenty nepřekrývají (dělení odpovídá B.m.)



WELCHOVA METODA

- ☑ váhování vzorků v každém segmentu oknem před výpočtem periodogramů

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT_{vz}) \cdot w(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2, \quad i = 0, \dots, L-1$$

kde U je výkonový normalizační faktor okna daný vztahem

$$U = \sum w^2(nT_{vz})/M$$

normalizační faktor U zajišťuje jednotkovou plochu vymezenou tvarem okna ve spektrální oblasti

$$\int_{-F/2}^{F/2} W(f) df = 1$$

Welchův odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)$$

STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

střední hodnota:

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

střední hodnota modifikovaného dílčího periodogramu:

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MT_{vz}U} T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) \cdot E[x_i(nT_{vz}) \cdot x_i(mT_{vz})] \cdot e^{-j2\pi f(n-m)T_{vz}} = \\ &= \frac{1}{MT_{vz}U} T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) \cdot \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f(n-m)T_{vz}}. \end{aligned}$$

Protože

$$\gamma_{xx}(nT_{vz}) = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot e^{j2\pi\alpha nT_{vz}} d\alpha, \text{ je}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MT_{vz}U} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot \left[T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)T_{vz}} \right] \cdot d\alpha = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{kde } W(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} w(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}} \right|^2$$

STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

rozptyl

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \cdot \tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[\tilde{P}_{xx}^W(f)]\}^2$$

segmenty bez překrývání ($L = K$)

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^W(f)] &= \frac{1}{L} \text{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &\approx \frac{1}{L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned}$$

segmenty s 50% překrytím a Bartlettovým (trojúhelníkovým) oknem ($L = 2K$)

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{9}{8L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f)$$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

nepřímá metoda – přes výpočet odhadu autokorelační funkce

- ✓ výpočet odhadu autokorelační funkce
- ✓ váhování odhadu autokorelační funkce oknem
 $w(mT_{vz}) \neq 0$ pro $-M+1 \leq m \leq M-1$; $w(mT_{vz}) = 0$ pro $|m| \geq M$
váhování autokorelační funkce oknem → vyhlazení periodogramu; sníží se rozptyl, omezí se frekvenční rozlišovací schopnost
- ✓ výpočet Fourierovy transformace váhovaného odhadu autokorelační funkce – váhování snižuje vliv odhadu autokorelační funkce počítaného pro malé hodnoty $(N-m)T_{vz}$, tj. velký posun m

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

Blackmanův-Tukeyův odhad

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(mT_{vz}) \cdot w(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

$$w(mT_{vz}) \begin{cases} \neq 0 & \text{pro } -M+1 \leq m \leq M-1 \\ = 0 & |m| \geq M \end{cases}$$

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(mT_{vz}) \cdot w(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

ve frekvenční oblasti

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = \int_{-F/2}^{F/2} \tilde{P}_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha, \quad \text{kde } \tilde{P}_{xx}(\alpha) \text{ je periodogram}$$

Váhování AKF oknem \Rightarrow vyhlazení periodogramu –
sníží se rozptyl, omezí se rozlišovací schopnost

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

požadavky na okna:

- sudá funkce (symetrická kolem $m=0$) ... odhad výkonového spektra bude reálná funkce
- $W(f) \geq 0$ pro $|f| \leq F/2 \Rightarrow$ odhad výkonové spektrální funkce bude nezáporný pro $|f| \leq F/2$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} E[\hat{P}_{xx}(\alpha)] W(f - \alpha) d\alpha,$$

$$\text{kde } E[\hat{P}_{xx}(\alpha)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) d\theta$$

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha d\theta.$$

v časové oblasti:

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] = T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E[r_{xx}(mT_{vz})] w(mT_{vz}) e^{-j2\pi f m T_{vz}} =$$

$$= T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) w_B(mT_{vz}) w(mT_{vz}) e^{-j2\pi f m T_{vz}}$$

kde $w_B(mT_{vz})$ je Bartlettovo okno

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

pokud $M \ll N$

($2M-1$ je délka okna; N je délka analyzované posloupnosti),
tj. délka okna w je mnohem menší než délka Bartlettova okna

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) \cdot d\theta,$$

protože

$$\begin{aligned} \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta) \cdot W(f - \alpha) \cdot d\alpha &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta) \cdot W(\alpha - f) \cdot d\alpha = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta + f) \cdot W(\alpha) \cdot d\alpha \approx W(f - \theta) \end{aligned}$$

analogie : $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt \sim f(t_0)$

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

rozptyl:

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] = E\left\{\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]^2\right\} - \left\{E\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]\right\}^2$$

$$E\left\{\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]^2\right\} = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} E\left[\hat{P}_{xx}(\alpha) \cdot \hat{P}_{xx}(\theta)\right] W(f-\alpha)W(f-\theta) \cdot d\alpha d\theta$$

toto už umíme

s tím už se obecně nedá hnout, pouze klademe-li si doplňkové předpoklady o vlastnostech náhodného procesu, jehož realizací je analyzovaná posloupnost;

BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

je-li náhodný proces normální, délka analyzované posloupnosti $N \gg M$.. délka okna váhujícího autokorelační posloupnost, pak

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}^2(\alpha) \cdot W^2(f - \alpha) d\alpha$$

dále, je-li $W(f)$ úzké ve srovnání se skutečným spektrem $\Gamma_{xx}(f)$ lze výraz pro rozptyl ještě zjednodušit na

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} W^2(\theta) d\theta \right] \\ &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} w^2(nT_{vz}) \right] \end{aligned}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

☑ míra kvality

$$Q_A = \frac{\{E[\tilde{P}_{xx}^A(f)]\}^2}{\text{var}[\tilde{P}_{xx}^A(f)]},$$

A je označení metody

Používá se i převrácená hodnota, nazývá se **variabilita**.

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

PERIODOGRAM

$$E[\hat{P}_{XX}(f)] = T_{VZ} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(mT_{VZ}) \cdot \gamma_{XX}(mT_{VZ}) \cdot e^{-j2\pi fmT_{VZ}} = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{XX}(\alpha) \cdot W_B(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\text{var}[\hat{P}_{XX}(f)] = \Gamma_{XX}^2(f) \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi N T_{VZ}}{N \cdot \sin 2\pi T_{VZ}} \right)^2 \right]$$

pro velká N, tj. $N \rightarrow \infty$

toto jen pro normální rozložení

$$E[\hat{P}_{XX}(f)] \rightarrow \Gamma_{XX}(f) \cdot \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) \cdot d\theta = \Gamma_{XX}(f) \quad \text{asymptoticky nestranný}$$

$$\text{var}[\hat{P}_{XX}(f)] = \Gamma_{XX}^2(f) \quad \text{nekonzistentní}$$

shrnutí:

$$Q_P = \frac{\Gamma_{XX}^2(f)}{\Gamma_{XX}^2(f)} = 1 \quad \text{asymptoticky}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

BARTLETTŮV ODHAD

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W_B(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi N T_{vz}}{N \cdot \sin 2\pi T_{vz}} \right)^2 \right]$$

znovu pro normální rozložení

pro $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, zatímco $K = N/M$ zůstává konstantní

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \Gamma_{xx}(f) \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) \cdot d\theta = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^B(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

BARTLETTŮV ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní
(kdyby K rostlo s $N \rightarrow \infty$, byl by konzistentní)

$$Q_B = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\frac{1}{K} \cdot \Gamma_{xx}^2(f)} = K = \frac{N}{M} \quad \text{asymptoticky}$$

frekvenční rozlišovací schopnost určená šířkou pásma
při poklesu o 3 dB (\square okno)

$$\Delta f = \frac{0,9}{MT_{vz}} \Rightarrow M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad Q_B = \frac{N}{M} = \frac{N}{\frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}} = 1,11 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

WELCHŮV ODHAD

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) d\theta, \quad \text{kde } W(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} w(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi fnT_{vz}} \right|^2$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) & \text{bez překrývání segmentů} \\ \frac{9}{8L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) & \text{s 50\% překrýváním} \end{cases}$$

pro $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \Gamma_{xx}(f)$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

WELCHŮV ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, pro $L \rightarrow \infty$ konzistentní, jinak ne

$$Q_w = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{bez překrývání} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & \text{s 50\% překrýváním} \\ & (L=2K=2N/M) \end{cases}$$

frekvenční rozlišovací schopnost trojúhelníkové okno

$$\Delta f = \frac{1,28}{MT_{vz}} \Rightarrow M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

$$Q_w = \begin{cases} 0,78 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) & \text{..... bez překrývání} \\ 1,39 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) & \text{..... s 50\% překrýváním} \end{cases} + \Delta \text{ okno}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

BLACKMANŮV-TUKEYHO ODHAD

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) d\theta,$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT_{vz}) \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT_{vz}) = \begin{cases} \frac{2M}{N} & \text{obdélníkové okno} \\ \frac{2M}{3N} & \text{trojúhelníkové okno} \end{cases}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

BLACKMANŮV-TUKEYHO ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní

$$Q_{BT} = 1,5 \cdot \frac{N}{M} \quad \text{pro trojúhelníkové okno}$$

protože délka okna je $2M-1$, frekvenční rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1,28}{2MT_{vz}} = \frac{0,64}{M \cdot T_{vz}}$$

$$Q_{BT} = \frac{1,5}{0,64} \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) = 2,34 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

srovnání všech výsledků:

! koeficient kvality závisí na N (čím větší N ,
tím větší Q)

neplatí u periodogramu

! koeficient kvality závisí na součinu $N \cdot \Delta f \Rightarrow$
 \Rightarrow při stejné kvalitě lze pokles Δf
kompenzovat růstem N a naopak

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Požadavky vychází z předpokladu, že:

- ✓ se zpracovává sekvence o délce N vzorků a je specifikována relativní rozlišovací schopnost $\Delta f \cdot T_{vz}$;
- ✓ pro výpočet se použije radix-2 FFT algoritmus
- ✓ pracnost je vyjádřena pouze počtem komplexních násobení

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Bartlettův odhad

$$\text{délka FFT: } M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad \text{počet FFT: } \frac{N}{M} = 1,11 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

$$\text{pracnost: } \frac{N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = \frac{N}{2} \log_2 \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

Welchův odhad (50% překrytí):

$$\text{délka FFT: } M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad \text{počet FFT: } \frac{2N}{M} = 1,56 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

$$\text{pracnost: } \frac{2N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

kromě výpočtu FFT je potřeba násobení pro váhování dat oknem
každý segment potřebuje M násobení, tedy celková pracnost je

$$2N + N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})} = N \cdot \log_2 \frac{5,12}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Blackmanův-Tukeyho odhad:

výpočet autokorelace $r_{xx}(mT_{vz})$... přes FFT,
délka $2M = \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$

celková pracnost:

$$\frac{N}{M} \cdot [M \cdot \log_2 2M] = N \cdot \log_2 \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$$

SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

metoda	míra kvality	pracnost
periodogram	1	$\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$
Bartlett	$1,11N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$\frac{N}{2} \log_2 \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$
Welch (50% překrytí)	$1,39N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$N \cdot \log_2 \frac{5,12}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$
Blackman-Tukey	$2,34N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$N \cdot \log_2 \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$

NEPARAMETRICKÉ METODY

✓ **výhody:**

- relativně jednoduché, srozumitelné, pomocí DFT (FFT) snadno spočitatelné

✓ **nevýhody:**

- potřeba dlouhého záznamu pro dostatečnou frekvenční rozlišovací schopnost;
- prosakování spekter díky použitým oknům (maskování slabých signálů);
- omezení vyplývající z předpokladu, že $r_{xx}(mT)=0$ pro $|m| \geq N$
- vnucená periodicitu signálu definicí periodogramu