SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VI.
SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA POMOCÍ METODY VLASTNÍCH ČÍSEL

MU

IBA

ZAČÍNÁME

AR(p) proces znehodnocený aditivním bílým šumem ≡ ARMA(p,p) proces;

teď bude … periodický signál + bílý šum

$$x(nT_{vz}) = 2.\cos(2\pi f_k T_{vz}).x(nT_{vz}-T_{vz}) - x(nT_{vz}-2T_{vz})$$

tento systém generuje posloupnost

$$x(nT_{vz}) = 2.\cos(2\pi f_k nT_{vz}) \text{ pro } n \geq 0$$

pokud jsou počáteční podmínky x(-1)=1 a x(-2)=0

ZAČÍNÁME

$$x(nT_{vz}) = 2.\cos(2\pi f_k T_{vz}).x(nT_{vz}-T_{vz}) - x(nT_{vz}-2T_{vz})$$

$$x(n) - 2.\cos(\omega_k).x(n-1) + x(n-2) = 0$$

$$z^0 - 2.\cos(\omega_k).z^{-1} + z^{-2} = 0$$

$$z^2 - 2.\cos(\omega_k).z + 1 = 0$$

$$z^2+pz+q=0 \qquad z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$z_{1,2} = \cos(\omega_k) \pm \sqrt{\cos^2(\omega_k) - 1} = \cos(\omega_k) \pm \sin(\omega_k)$$

ZAČÍNÁME

obecně, posloupnost skládající se z p harmonických složek splňuje diferenční rovnici

$$x(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(nT_{vz} - mT_{vz}), \qquad (☯)$$

což odpovídá systému s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \qquad (☠)$$

(Polynom $A(z)=1+\sum a_m z^{-m}$ má 2p kořenů na jednotkovém kruhu v místech, která odpovídají frekvencím harmonické posloupnosti.)

PRINCIP

- ☑ přepokládejme periodickou posloupnost + bílý šum w(nT) $\{E(|w(nT_{vz})^2|)=\sigma_w^2\}$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + w(nT_{vz})$$

po dosazení za x(nT) z tohoto vztahu do (☯) máme

$$y(nT_{vz}) - w(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m \left[y(nT_{vz} - mT_{vz}) - w(nT_{vz} - mT_{vz}) \right]$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(nT_{vz} - mT_{vz}) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad a_0 \equiv 1$$

což představuje ARMA proces s identickými AR i MA parametry

$$\mathbf{y}^T.\mathbf{a} = \mathbf{w}^T.\mathbf{a} \qquad (🐈)$$

$\mathbf{y}^T = [y(nT_{vz}), y(nT_{vz}-T_{vz}),\ldots,y(nT_{vz}-2pT_{vz})]$,

$\mathbf{w}^T = [w(nT_{vz}),w(nT_{vz}-T_{vz}),\ldots,w(nT_{vz}-2pT_{vz})]$,

$\mathbf{a}^T = [1, a_1,\ldots, a_{2p-1},a_{2p}]$,

PRINCIP

- ☑ vynásobením obou stran ( ) vektorem **y** a určením střední hodnoty

$$E(\mathbf{y}.\mathbf{y}^T).\mathbf{a} = E(\mathbf{y}.\mathbf{w}^T).\mathbf{a} = E((\mathbf{x}+\mathbf{w}).\mathbf{w}^T).\mathbf{a}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{yy}.\mathbf{a} = 0 + \sigma_w^2.\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{\Gamma}_{yy} - \sigma_w^2.\mathbf{I}).\mathbf{a} = 0$$ ... vlastní (charakteristická) rovnice

σ_w^2 je vlastní číslo autokorelační matice $\mathbf{\Gamma}_{yy}$;

a je vlastní vektor $\mathbf{\Gamma}_{yy}$ spojený s vlastním číslem σ_w^2;

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

Mějme p náhodně fázově posunutých harmonických posloupností s aditivním bílým šumem.

Hodnoty autokorelační funkce jsou

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{p} P_i$$

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{i=1}^{p} P_i . \cos 2\pi f_i k T_{vz}, \quad k \neq 0; \quad P_i = A_i^2 / 2 \text{ je}$$

průměrný výkon i-té sinusovky, A_i je její amplituda

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

- ☑ maticově

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 T_{vz} & \cos 2\pi f_2 T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p T_{vz} \\ \cos 2\pi f_1 2T_{vz} & \cos 2\pi f_2 2T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p 2T_{vz} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 pT_{vz} & \cos 2\pi f_2 pT_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p pT_{vz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

- ☑ známe-li frekvence f_i, $1 \leq i \leq p$, můžeme spočítat výkon jednotlivých harmonických složek, místo hodnot $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ použijeme odhady $r_{yy}(mT_{vz})$, známe-li výkony, určíme rozptyl šumu

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{p} P_i$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

podle Pisarenka platí pro ARMA proces obsahující p harmonických složek v aditivním bílém šumu, že rozptyl σ_w^2 odpovídá minimálnímu vlastnímu číslu autokorelační matice, pokud je rozměr autokorelační matice větší nebo roven

$$(2p+1) \times (2p+1).$$

Potom požadovaný vektor koeficientů ARMA modelu je dán vlastním vektorem náležejícím minimálnímu vlastnímu číslu.

Frekvence f_i, $i=1,\ldots,p$ se určí řešením rovnice, dané položením jmenovatele ve vztahu (☠) rovno nule, kde koeficienty a_m jsou určeny vlastním vektorem spojeným s minimálním vlastním číslem.

VLADIMIR FEDOROVICH PISARENKO

?

Ph.D.

Moskevská státní univerzita 1963

disertační práce:

Matematická klasifikace objektů

obor: Teorie pravděpodobnosti a
stochastické procesy

školitel: Roland Lvovich Dobrushin

Pisarenko, V. F. *The retrieval of harmonics from a covariance function.* Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973.

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

Předpokládejme hodnoty AKF $\gamma_{yy}(0)=3$, $\gamma_{yy}(1)=1$ a $\gamma_{yy}(2)=0$. Proces obsahuje jednu harmonickou posloupnost v bílém šumu. Určete její frekvenci, výkon a rozptyl, tj. výkon šumu.

Řešení:

autokorelační matice je

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

její minimální vlastní číslo je rovno nejmenšímu kořenu charakteristického polynomu

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \lambda_{min} = 3-\sqrt{2}$$

odpovídající charakteristický vektor má složky $a_0=1$, a_1, a_2, pro které platí

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

řešením získáme $a_1 = -\sqrt{2}$ a $a_2 = 1$

$$z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z_1| = |z_2| = 1,$$

tj. leží na jednotkové kružnici

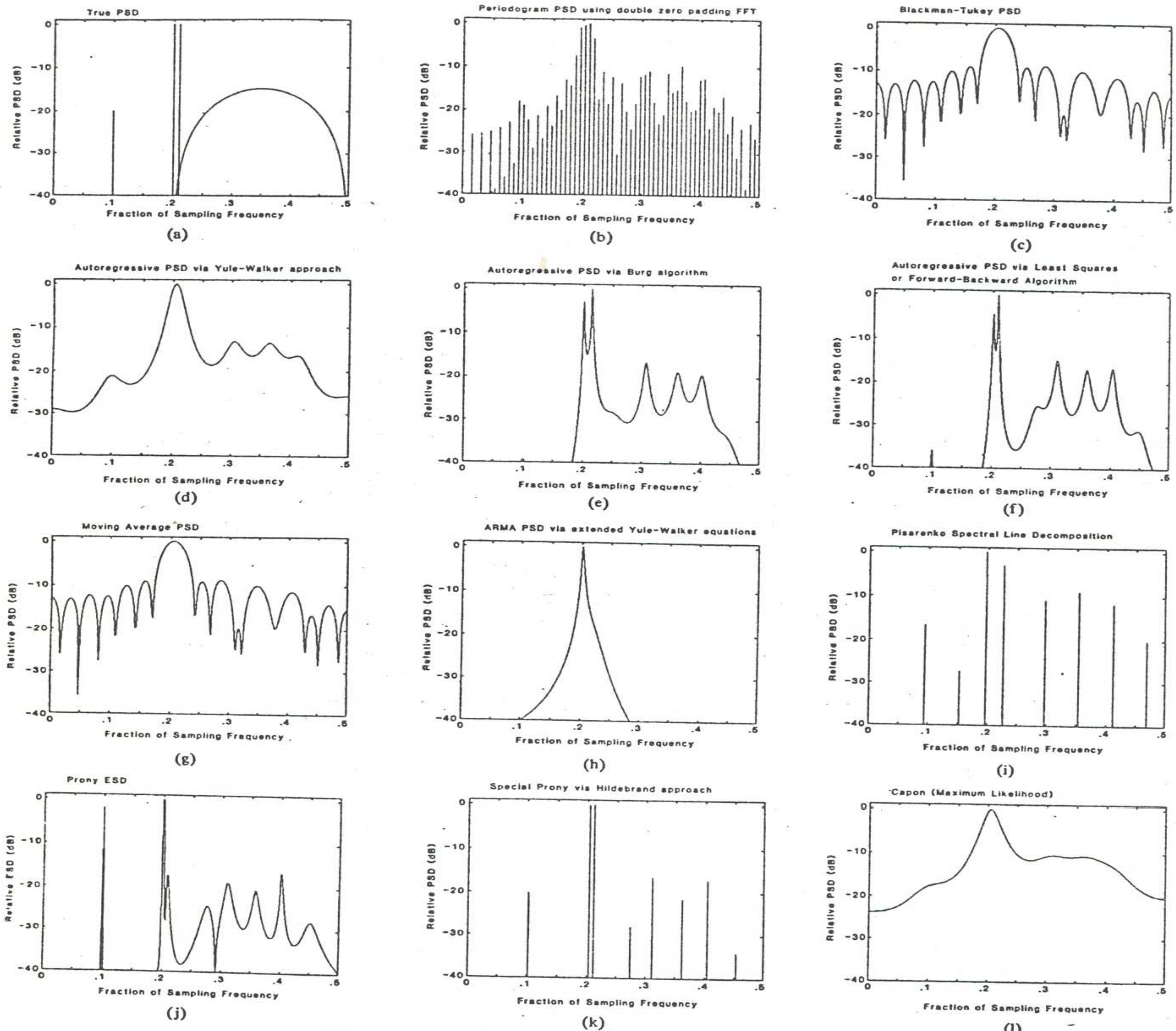
$$z_1 = e^{j2\pi f_1 T_{vz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f_1.T_{vz} = 1/8 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 1/8T_{vz}$$

výkon $P_1.\cos(2\pi f_1 T_{vz}) = \gamma_{yy}(1) = 1 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2}$,

proto

$$A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2.\sqrt{2}}$$

kontrola: $\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1 = 3-\sqrt{2}$, což souhlasí s λ_{min}.



True PSD
Periodogram PSD using double zero padding FFT
Blackman-Tukey PSD
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
Autoregressive PSD via Burg algorithm
Autoregressive PSD via Least Squares or Forward-Backward Algorithm
Moving Average PSD
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
Pisarenko Spectral Line Decomposition
Prony ESD
Special Prony via Hildebrand approach
Capon (Maximum Likelihood)
Relative PSD (dB)
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)

VÍC UŽ TOHO NEBUDE