

# Mikrovlnná interferometrie plazmatu

## Obsah

<b>1</b>	<b>Teorie</b>	<b>2</b>
1.1	Dielektrický model plazmatu . . . . .	2
1.2	Komplexní index lomu . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Experimentální uspořádání</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Měření</b>	<b>4</b>
3.1	Stanovení hustoty elektronů . . . . .	4
3.2	Stanovení srážkové frekvence . . . . .	5
3.3	Tloušťka plazmatu . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Úkoly</b>	<b>6</b>
	References6	

# 1 Teorie

Je obecně známo, že k popisu chování plazmatu lze přistupovat kvalitativně různými způsoby (vodič, dielektrikum, magnetická kapalina...) přičemž vhodnost jednotlivých přístupů záleží na typu interakce kterou chceme popsat a vstupních parametrech plazmatu (např. tlak nebo termodynamická rovnováha). V případě interakce elektromagnetického záření s plazmatem se v oblasti nízkých frekvencí popisuje plazma jako vodič pomocí "nízkofrekvenční vodivosti" zatímco při vysokých frekvencích je vhodné použít dielektrický model plazmatu a definovat "vysokofrekvenční permitivitu" [1]. Hranicí mezi nízkými a vysokými frekvencemi je plazmová frekvence, tedy frekvence od které se vlny mohou plazmatem šířit. Ta souvisí s hustotou plazmatu následovně.

$$\omega_{\text{pl}} = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (1)$$

kde  $n_e$  označuje hustotu volných elektronů,  $e$  elementární náboj,  $m_e$  hmotnost elektronu a  $\epsilon_0$  permitivitu vakua.

## 1.1 Dielektrický model plazmatu

Protože interferometrie je založena na průchodu vln prostředím, je nutné použít dostatečně vysoké frekvence, aby se mohly vlny v plazmatu šířit. Zajímá nás tedy bude dielektrický model plazmatu. Přímé odvození permitivity plazmatu vychází z Boltzmannovy kinetické rovnice (BKR) a je poněkud zdouhavé. Naznačíme alespoň odvození permitivity při znalosti vodivosti plazmatu, která je pro úvahy o plazmatu poněkud intuitivnější (a vychází právě z BKR). Uvažujme nejprve diferenciální tvar Maxwellovy rovnice  $\nabla \times B = \mu_0(J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$  (Ampérův zákon) v harmonických polích o kruhové frekvenci  $\omega$  spolu s klasickým Ohmovým zákonem  $J = \sigma E$ , přičemž  $\sigma$  odpovídá vodivosti plazmatu. Podle pravidel o derivaci jej můžeme upravit do tvaru:

$$\nabla \times B = -i\omega\mu_0\epsilon_0(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0})E, \quad (2)$$

kde obsah závorky na pravé straně přeznačíme na  $\epsilon_r$  [2] což je relativní vysokofrekvenční permitivita plazmatu (dále jen "permitivita plazmatu"). Při důsledném odvození bychom dále zjistili, že permitivita plazmatu je obecně komplexní tenzor, nicméně v nemagnetickém plazmatu se zjednodušuje na komplexní skalár. Její přesný tvar závisí na rozdělovací funkci elektronů (a příspěvku těžkých částic), většinou lze ale použít tvar pro Maxwellovské rozdělení rychlostí. Relativní permitivita nemagnetického plazmatu při srážkové frekvenci pro přenos hybnosti elektron-neutrál  $\nu_m$  (dále jen "srážková frekvence") je pak:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0 \omega} \frac{(\omega - i\nu_m)}{(\omega^2 + \nu_m^2)} \quad (3)$$

## 1.2 Komplexní index lomu

Elektromagnetická vlna se vlastně nechová nijak zvláštně, až na jeden detail, který souvisí s číselnou velikostí permitivity - na rozdíl od běžných dielektrik je reálná část permitivity plazmatu menší než jedna, a proto jsou vlny delší než ve vakuu. Pro vlastní popis šíření vln, ale není permitivita příliš vhodným parametrem. Mnohem intuitivnější je popis pomocí indexu lomu  $N$ , jehož reálná část je přímo úměrná fázové rychlosti vlny (a tedy i fázovému posuvu  $d\phi = k_0(1 - n(z))dz$ , kde  $k_0 = \omega/c$  a  $dz$  je elementární kousek dráhy) a imaginární část zase ztrátám v prostředí (a tedy útlumu prošlého výkonu

$\frac{dP}{P} = -\frac{2\omega\kappa(z)}{c}dz$ , kde  $P$  představuje výkon). Pro úplnost předpokládejme, že změnu indexu lomu můžeme zcela přisoudit vlivu elektronů (další vlivy jako teplotní změny v indexu lomu plynu jsou zanedbatelné). Integrovaná rovnice pro ztráty výkonu a posun fáze vycházejí v homogenním prostředí ( $n$  a  $\kappa$  nezávislé na  $z$ ) následovně:

$$\Delta\phi = k_0(1 - n)\Delta z; \quad P = P_0 e^{-\frac{2\omega\kappa}{c}\Delta z} \quad (4)$$

Mezi permitivitou  $\epsilon_r = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  a indexem lomu  $N = n + i\kappa$  platí (v nemagnetickém prostředí) kvadratický vztah  $\epsilon_r = N^2$ . Podle pravidel počítání v komplexním oboru vyjádříme jednotlivé složky indexu lomu:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{2}}; \quad \kappa = \sqrt{\frac{-\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{2}} \quad (5)$$

Tyto výrazy jsou silně provázané s oběma složkami permitivity (a oběma parametry plazmatu), při použití vhodných aproximací je to možné. Spojení rovnic (4) a (3) prostřednictvím (5) přímo propojuje interferometrické měření (fázový posun a útlum výkonu) s parametry plazmatu - koncentrací elektronů a srážkovou frekvencí.

## 2 Experimentální uspořádání

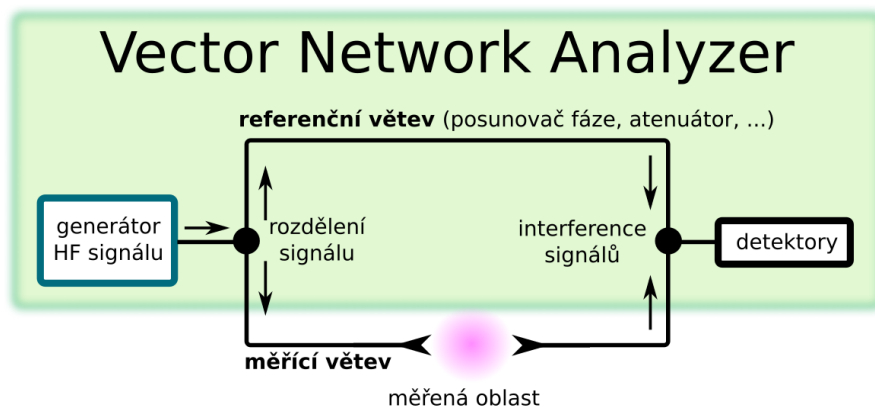
Pomocí vysokonapěťového zdroje pro výbojky s regulátorem proudu budíme výboj v zářivce o průměru 18 mm. Jde o doutnavý výboj v argonu a parách rtuti za sníženého tlaku (typická hodnota tlaku v zářivce se pohybuje kolem 400 Pa), u kterého nebývá hustota elektronů tak vysoká jako u atmosferického plazmatu.

Klasické uspořádání interferometrického experimentu (např. dle Mach-Zehndera [5]) předpokládá rozdělení signálu ze zdroje do dvou tras (větví) – referenční a měřicí. Ty jsou nakonec svedeny dohromady, prošlé signály spolu interferují a výsledný signál detekujeme. Protože v praxi nelze zaručit, že při změně podmínek v měřicí větvi nedojde kromě změny fáze také ke změně amplitudy signálu, není jeden detektor dostačující a používá se metoda kvadrurní detekce [6] se dvěma detektory. Naměřená data je možné snadno převést na informace o fázi a amplitudě signálů.

U této úlohy ale vypadá měřicí aparatura poněkud odlišně (Obr. 1) – využíváme totiž Vector Network Analyzer (VNA) **miniVNA Tiny** od firmy **mRS**. Zjednodušeně řečeno jde o interferometr, u kterého je referenční větev integrována v těle přístroje a na porty se připojuje pouze měřicí větev experimentu. Jeden port je nastaven jako zdroj výstupního signálu s definovanou amplitudou a prošlý signál vstupuje do druhého portu. Pomocí ovládání na displeji zobrazíme a zaznamenáme fázi a útlum.

Fázi a amplitudu měří VNA buď přímo, nebo prostřednictvím S-parametrů rozptylové matice  $2 \times 2$ , které obsahují informaci o fázi i amplitudě odražené a prošlé vlny. V případě že zdrojem je port č. 1 jde o parametry  $S_{11}$  (odraz) a  $S_{21}$  (přechod). Fázi zaznamenáváme u parametru  $S_{21}$ , zatímco u výkonu musíme sledovat jak  $S_{11}$  tak  $S_{21}$  - ztráty v plazmatu pak odpovídají rozdílu nastaveného výkonu mínus odražený a prošlý výkon.

Výbojová trubice (zářivka) prochází vlnovodovou (WR340) částí měřicí větve experimentu pod úhlem  $35^\circ$  (středem užší strany vlnovodu) a interakce s měřicí vlnou tak probíhá po celé její délce uzavřené uvnitř vlnovodu .



Obrázek 1: Klasický interferometr z pohledu Network Analyzera - kromě měřicí větve je vše obsaženo v těle přístroje.

### 3 Měření

První část měření spočívá v zprovoznění měřicí aparatury a výbojky. Pokud není VNA zkalibrovaný provedeme kalibraci jeho portů pomocí definovaných zátěží (zkrat, open a  $50\Omega$ ). Jakmile je kalibrace hotová, na oba porty pomocí koaxiálního kabelu s SMA konektory připojíme měřicí větev - vlnovod s výbojkou. Pomocí ovládní nastavujeme parametry měření (frekvence, výkon, sledovaná veličina, atp.) a na počítačovém výstupu pozorujeme ukládáme naměřená data. Obsluha samotné výbojky je triviální - nastavíme pomocí regulátoru jenom proud.

Hlavním cílem praktika je v první řadě určení koncentrace elektronů a srážkové frekvence ve výboji, nicméně úspěšné měření zejména druhého z těchto parametrů může být problematické, a proto je potřeba udělat několik opatření. Už samotná volba měřicí frekvence je klíčová - musí být dostatečně vysoká, aby prošla vlnovodem, ale na druhou stranu se s rostoucí frekvencí vln blíží relativní permitivita jedničky a citlivost metody klesá (menší fázové posuvy). Typicky tak volíme frekvence doporučené pro dané vlnovodové pásmo.

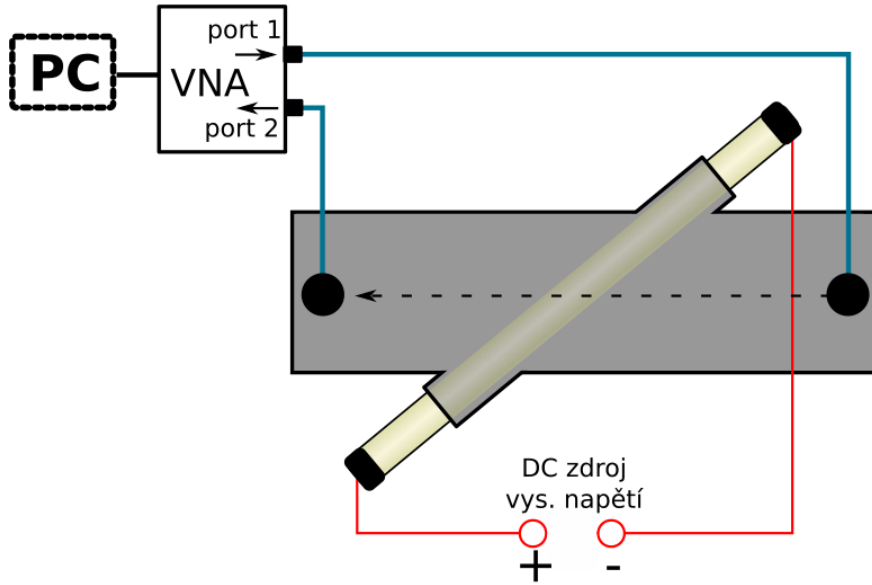
Zadruhé je potřeba vhodně aproximovat rovnice (5) abychom byli schopni explicitně vyjádřit hledané parametry, a zároveň nevnesli do měření příliš velkou systematickou chybu. V dané konfiguraci se dá očekávat, že ztráty mikrovln ve vlnovodu jsou způsobeny téměř výhradně útlumem vlny v plazmatu. Budeme-li dále předpokládat, že srážková frekvence je malá ( $\omega \gg \nu_m$ ), můžeme jednotlivé složky indexu lomu aproximovat následujícím způsobem.

#### 3.1 Stanovení hustoty elektronů

Prvním krokem je aproximace reálné části indexu lomu, do které v tomto případě imaginární složka  $\epsilon_2$  téměř nepřispívá a můžeme ji zanedbat úplně. Pokud navíc vypustíme člen  $\nu_m^2$  ve jmenovateli (v součtu s  $\omega^2$  zanedbatelný), dostáváme:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \quad (6)$$

po dosazení do první rovnice v (4) vyjádříme fázový posun  $\Delta\phi$ :



Obrázek 2: Experimentální uspořádání pokusu (pohled shora). Nejdůležitější částí měřicí větve je vlnovod, kterým prochází výbojka (zářivka), zbytek tvoří propojovací kabely a konektory. Výstupy z VNA jsou zobrazeny na počítači, jehož prostřednictvím je také můžeme exportovat.

$$\Delta\phi = k_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{n_e \epsilon^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}} \right) \Delta z \quad (7)$$

a konečně po úpravě dostáváme výpočet hustoty elektronů z fázového posunu, který zjistíme z měření parametru  $S_{21}$  / který odpovídá rozdílu fáze na druhém portu s a bez přítomnosti plazmatu.

$$n_e = \frac{1 - \left( 1 - \frac{\Delta\phi}{k_0 \Delta z} \right)^2 m_e \epsilon_0 \omega^2}{e^2} \quad (8)$$

### 3.2 Stanovení srážkové frekvence

Aproximace imaginární části indexu lomu je o něco komplikovanější a navíc předpokládá znalost koncentrace elektronů, proto ji taky dopočítáváme až jako druhou v pořadí. Pomocí Taylorova rozvoje je možné dojít k tvaru:

$$\kappa = \frac{|\epsilon_2|}{2\sqrt{2} |\epsilon_1|} \quad (9)$$

pokud do něj dosadíme (3) a levou stranu pomocí (4) nahradíme  $\kappa = \frac{c \ln \frac{P_0}{P}}{2\omega}$ , můžeme po úpravě (při zanedbání kvadratických členu) vyjádřit srážkovou frekvenci:

$$\nu_m = \frac{c \ln \frac{P_0}{P}}{2\omega \Delta z} \frac{2\sqrt{2} |\epsilon_1|}{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^3}} \quad (10)$$

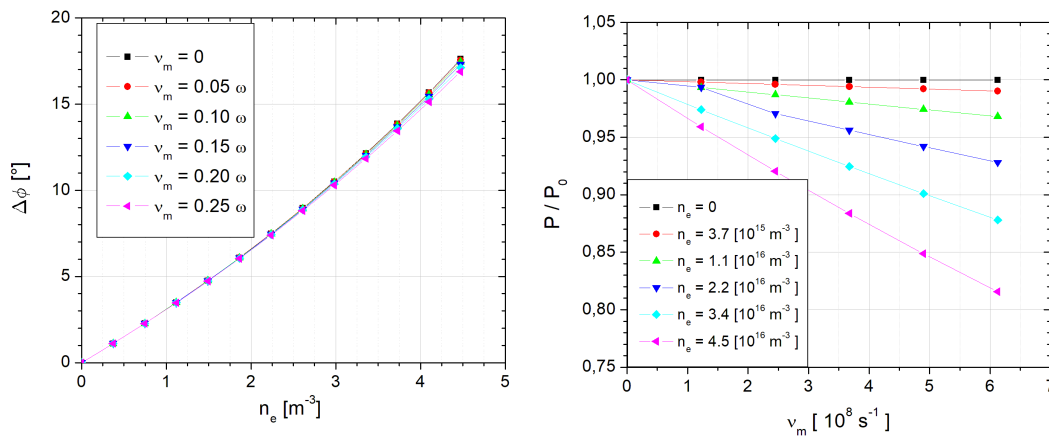
Na rozdíl od fáze je zde pro správné stanovení ztrát v plazmatu nutné měřit nejen výkon prošlý měřicí větví, ale i výkon odražený zpět. Ztráty pak odpovídají rozdílu mezi nastaveným výkonem a součtem odraženého a prošlého výkonu.

### 3.3 Tloušťka plazmatu

Pro oba výpočty zbývá ještě odhadnout jaká je tloušťka plazmatu. To není úplně jednoduché, protože ve skutečnosti nejde o desku. I v případě, že je plazma uvnitř zářivky homogenní, jde přinejlepším o válec procházející šikmo skrz vlnovod, který dokonce ani nevyplňuje celý jeho průřez (tedy vlna by se mu mohla i "vyhnout").

Přestože je tento předpoklad o homogenní desce plazmatu porušen, při vhodném vidu ve vlnovodu (profil elektromagnetické vlny) je tato teorie použitelná. Potřebujeme jen plazma aproximovat deskou, která bude mít stejný objem jako uzavřená část válce.

Přesnější by bylo modelovat celý problém numericky, ale tvorba modelu a práce s numerickým softwarem a poněkud přesahuje rámec praktika. Na Obr. 3 proto najdete náčrt numerického modelu a fity závislosti fázového posunu a ztraceného výkonu na parametrech plazmatu - ke srovnání s vašimi výsledky.



Obrázek 3: Fity numerického modelu. Model řeší vlastně inverzní problém, proto jsou vyneseny fity posunu fáze v závislosti na hustotě elektronů a útlum výkonu v závislosti na srážkové frekvenci. Model je počítán pro frekvenci 2.45 GHz, tedy  $\omega = 2\pi \times 2.45 \text{ s}^{-1}$ .

## 4 Úkoly

1. Sestavte interferometrický experiment pomocí network analyzery. Pokud je to nutné proveďte kalibraci.
2. Pro vhodnou měřicí frekvenci naměřte posuny ve fázi a amplitudě v přítomnosti plazmatu.
3. Stanovte hustotu elektronů a srážkovou frekvenci (pomocí geometrické úvahy, příčný rozměr vlnovodu WR340 je 86 mm, průměr zářivky 18 mm a úhel mezi zářivkou a vlnovodem je  $35^\circ$ ) a porovnejte s výsledky numerického modelu.
4. Naměřte závislost parametrů plazmatu na výbojovém proudu.
- 5\*. Proveďte měření na další(ch) frekvenc(i)ch).

## Reference

- [1] Lieberman M A and Lichtenberg A J 2005 *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing* (Hoboken: Wiley-Interscience)
- [2] Bittencourt J A 2003 *Fundamentals of plasma physics* (Sao Jose de Campos, Brazil)
- [3] Heald M A, Wharton C B 1964 *Plasma Diagnostics with Microwaves* (Wiley)
- [4] Wolf J A 2017 *Implementation of microwave phase-shift as a diagnostic for electron density measurements in a reactive CO<sub>2</sub> microwave plasma* <http://www.ispc-conference.org/ispcproc/ispc23/262.pdf>
- [5] Zehnder L 1891 *Zeitschrift für Instrumentenkunde* **11** 275–285
- [6] Mesko M, Bonaventura Z, Vašina P, Tálský A, Frgala Z, Kudrle V, Janča J 2004 *Plasma Sources Sci. Technol.* **13** 562–568