V našem příkladě $f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$ $\qquad a_{ij}=a_{ji}$

Matice bilin. formy v dané bázi $\alpha=(u_1,\dots,u_n)$ prostoru U

je matice A typu $n\times n$ taková, že

$$A_{ij}=f(u_i,u_j)$$

žádné speciální značení ~~$(f)_\alpha$~~

<u>Příklad</u> $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x,y)=\sum a_{ij}x_iy_j$

Matice (a_{ij}) je maticí bilin. formy f ve stand. bázi

Jestliže $f:U\times U\to\mathbb{R}$ má v bázi α matici $A=(a_{ij})$, pak

$$f(u,v)=\sum a_{ij}\,x_i\,y_j=(x_1,x_2,\dots,x_n)\,A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}=(u)_\alpha^T\,A\,(v)_\alpha$$

Příklad $\quad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_2x_3 - 8x_1x_3$

je kvadr. forma, neboť vznikne dosazením x za y v nějaké bilin. formě

$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2 - 4x_1y_3 - 4x_3y_1$$

$$f(x,x) = x_1x_1 - 2x_2x_2 + \underbrace{\frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_2}_{+x_2x_3} \underbrace{-4x_1x_3 - 4x_3x_1}_{-8x_1x_3}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underline{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \underbrace{f(v,v)} \;\; \underline{- f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) - \underbrace{f(v,v)} \Big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(2 f(u,v) + 2 f(v,u) \big) = \frac{1}{4}\big(4 f(u,v) \big) = f(u,v)$$

Algoritmus, který k symetrické matici A najde diagonální matici D a matici P takové, že platí

$$D = P^T A P \quad \leftarrow \text{transformační vztah pro matice symetr. bilin. forem}$$

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array} \xrightarrow[\text{a sloupc. operace}]{\text{stejné řádk.}} \begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

$f(u_1,u_1)$	$f(u_1,u_2)$	....	$f(u_1,u_n)$	u_1
$f(u_2,u_1)$	$f(u_2,u_2)$	....	$f(u_2,u_n)$	u_2
...	...	...	...	$\vdots$
$f(u_n,u_1)$	$f(u_n,u_2)$	....	$f(u_n,u_n)$	u_n
u_1	u_2		u_n	

$\cancel{f(u_1,u_1)}$

k 1. řádku přičteme 2. řádek

$\sim$

$$\underbrace{f(u_1,u_1)+f(u_2,u_1)}_{f(u_1+u_2,\,u_1)} \qquad \underbrace{f(u_1,u_2)+f(u_2,u_2)}_{f(u_1+u_2,\,u_2)} \quad \ldots\ldots$$

$u_1 + u_2$

$\sim$

u_1 $\quad$ ~~u_2~~ $\quad$ u_2 $\quad$ ......

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A \\ \text{matice } f \\ \text{v bázi } \alpha \end{matrix} & E \\ \hline E & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \quad b_{nn} \end{matrix} & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

$$B = P^T A P$$

matice v bázi β

$\downarrow$

v bázi α

$$P = (id)_{\alpha\beta}$$

$$v_1 = (u_1 \dots u_n)\,(v_1)_\alpha$$

$$v_2 = (u_1 \dots u_n)\,(v_2)_\alpha$$

$(id)_{\alpha\beta}$

$$\boxed{\underbrace{(v_1\, v_2 \,..\, v_n)}_{\beta} = \underbrace{(u_1, u_2 .. u_n)}_{\alpha}\, P}$$

$$v_1 = \sum c_{1i} u_i$$

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots \\ c_{12} & \dots \\ \vdots & \\ c_{1n} & \dots \end{pmatrix}$$

<u>Důsledek</u>: Ke každé kvadratické formě $g: U \to K$ existuje báze B, v jejíž souřadnicích

$$g(u) = \sum b_{ii} y_i^2$$

kde $(u)_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

<u>Dk</u> $g(u) = f(u,u) \overset{\text{ve vhodné bázi } B}{=} \sum b_{ii} y_i^2$

Takové bázi se říká <u>polární báze</u> kvadr. formy.

Polární báze NENÍ URČENA JEDNOZNAČNĚ!

$$(A_1 + A_2 + \dots)(A_1 + A_2 + \dots) = A_1^2 + A_2^2 + \dots + 2A_1A_2 + \dots + 2A_iA_j \quad i \neq j$$

$$= a_{11}\underbrace{\left(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n\right)}_{}{}^2 + \sum_{2 \le i \le j \le n} b_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1'^2 + \text{něco bez } x_1$$

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n$$

(2) Pokud $a_{11} = 0$, ale nějaké $a_{ii} \neq 0$, provedeme totéž s x_i místo x_1

(3) Všechna $a_{ii} = 0$. Nechť $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$. Pak provedeme substituci

$$x_i' = x_i - x_j \implies x_i = x_i' + x_j'$$

$$x_l' = x_l \quad \text{pro } l \neq i$$

$$(u)_\beta = y = Qx = Q(u)_\alpha \Rightarrow Q = (id)_{\beta\alpha}$$

$$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)(id)_{\alpha\beta} = (u_1, u_2, \dots, u_n)\, Q^{-1}$$

Příklad v textu k 4 přednášce – PROJÍT

Kvadratické formy

Matice kvadr. formy v dané bázi je matice definující sym. bilin. formy

$g: U \to \mathbb{K}$ kvadr. forma $\quad g(u) = f(u,u) \quad f: U \times U \to \mathbb{K}$ sym bilin

matice g v bázi α = matice f v bázi α.

kde $b_{ii} = -1, 0$ nebo 1 a počet koeficientů $1, -1$ a 0 je nezávislý na výběru báze B.

Důkaz. Již víme, že existuje báze v níž

$$g(u) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + \dots + a_{nn} y_n^2, \quad a_{ii} \in \mathbb{R}$$

Pokud $a_{ii} = 0$ neděláme nic.

Pokud $a_{ii} > 0$, provedeme záměnu souřadnic

$$x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$$

Pak $a_{ii} y_i^2 = 1 \cdot (x_i)^2$

Pokud $a_{ii} < 0$, provedeme záměnu souřadnic

$$x_i = \sqrt{-a_{ii}}\, y_i$$

Na A platí $g(u) > 0$ pokud $u \neq \vec{o}$. (plyne z vyjádření v rámci důkazu)

Na B platí $g(u) \leq 0$

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B)$$
$$\geq p + n - q - n = p - q > 0$$

Tedy $A \cap B \neq \{\vec{o}\}$, existuje $u \in A \cap B \setminus \{\vec{o}\}$

$$\underset{u \in B}{0 \geq} g(u) \underset{u \in A}{> 0}$$, spor.