Skalární součin

Ortogonální báze prostoru U .. báze tvořena navzájem kolmými vektory

Ortonormální báze —||— .... báze $(u_1, u_2, .. u_n)$ taková, že

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad i \neq j$$

$$\|u_i\| = 1$$

Gramův - Schmidtův ortogonalizační proces

je postup, který z lin. nezávislých vektorů $u_1, u_2, .. u_k$ vytvoří ortogonální vektory $v_1, v_2, .. v_k$ takové, že

$$[v_1, v_2, \dots v_i] = [u_1, u_2, \dots u_i] \text{ pro všechna } i \in \{1, 2, .., k\}$$

Hledáme v_3 ve tvaru $\quad v_3 = u_3 - t_1 v_1 - t_2 v_2 \qquad (*)$

Chceme $\langle v_3, v_2 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 0$ a víme, že $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

$(*)$ vynásobíme v_1

$$\langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle - t_1 \langle v_1, v_1 \rangle - t_2 \langle v_2, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle u_3, v_1 \rangle - t_1 \|v_1\|^2$$

$$t_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$(*)$ vynásobíme v_2, obdobně

$$t_2 = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$$

Když nyní položíme $v_3 = u_3 - t_1 v_1 - t_2 v_2$, dostaneme $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0$ a také $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, u_3] = [u_1, u_2, u_3]$, atd.

Ortogonální doplněk podprostoru U ve V

je množina $\quad U^{\perp} = \{ v \in V,\ \forall u \in U,\ \langle v, u \rangle = 0 \}$

$U^{\perp}$ je vekt. podprostor

$v_1, v_2 \in U^{\perp}$, pak pro $a v_1 + b v_2$ a všechny $u \in U$ platí

$$\langle a v_1 + b v_2, u \rangle = a \underbrace{\langle v_1, u \rangle}_{0} + b \underbrace{\langle v_2, u \rangle}_{0} = 0$$

tedy $a v_1 + b v_2 \in U^{\perp}$.

Kolmá projekce do podprostoru U

je zobrazení $\quad P_U : V \longrightarrow U$

takové, že platí

Tedy vyjádření vektoru v v ortonormální bázi je

$$v = \underbrace{\langle v, u_1\rangle u_1 + \dots}_{P_U v} \dots + \langle v, u_n\rangle u_n$$

Proto:

$$v - P_U v = \langle v, u_{k+1}\rangle u_{k+1} + \dots + \langle v, u_n\rangle u_n$$

Tento vektor leží v $U^\perp$, neboť je kolmý k vektorům $u_1, u_2, \dots, u_k$ i jejich lin. kombinacím

$i \le k$ $$\langle v - P_U v, u_i\rangle = \langle v, u_{k+1}\rangle \underbrace{\langle u_{k+1}, u_i\rangle}_{=0} + \dots + \langle v, u_n\rangle \underbrace{\langle u_n, u_i\rangle}_{=0}$$

$$= 0$$

$$v = \underbrace{\langle v, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k\rangle u_k}_{\in U \quad P_U v} + \underbrace{\langle v, u_{k+1}\rangle u_{k+1} + \dots + \langle v, u_n\rangle u_n}_{P_{U^\perp} v \quad \in U^\perp !}.$$

Praktické počítání kolmé projekce

V praxi, $U = [u_1, u_2, u_3]$ jistý podprostor

Když by u_1, u_2, u_3 byla ortonormální báze, pak

$$P_U v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_3\rangle u_3$$

Ale v aplikacích tomu tak není. Proto hledáme $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$

tak, aby platilo

$$P_U v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

Podmínka $v - P_U v \perp u_1, u_2, u_3$

dává 3 rovnice o neznámých a_1, a_2, a_3:

$$\langle v - P_U v, u_i\rangle = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

$$\langle v, v_1 \rangle = y_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{= 1} + y_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{= 0} + \dots + y_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{= 0}$$

$$y_1 = \langle v, v_1 \rangle \qquad y_i = \langle v, v_i \rangle$$

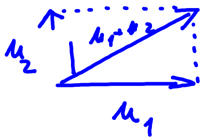
$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i , \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \langle v_i, v_j \rangle \quad \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Důkaz: (a) Pro každé $u \in U$ platí

$$\|v-u\|^2 = \|\underbrace{v-P_U v}_{\in U^\perp} + \underbrace{P_U v - u}_{\in U}\|^2 = \langle (v-P_U v) + (P_U v - u), (v - P_U v) + (P_U v - u)\rangle$$

$$= \langle v - P_U v, v - P_U v\rangle + \langle P_U v - u, P_U v - u\rangle = \|v - P_U v\|^2 + \|P_U v - u\|^2$$



$$\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

Závěr:

$\|v - P_U v\|^2 \leq \|v-u\|^2$ a rovnost nastane právě když $P_U v = u$.

(b) $$\frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle v, P_U v + u - P_U v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle \overbrace{v - P_U v}^{\in U^\perp} + P_U v, \overset{\in U}{u}\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

KROK VEDLE

<u>Věta:</u> Vzdálenost bodu A od podprostoru $\mathcal{M} = B + Z(\mathcal{M})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $Z(\mathcal{M})^{\perp}$.

$$\mathrm{dist}\,(A, \mathcal{M}) = \| P_{Z(\mathcal{M})^{\perp}} (A-B) \|$$

Dále následující tvrzení jsou ekvivalentní

(a) $\mathrm{dist}\,(A, \mathcal{M}) = \| A - M \|$ kde $M \in \mathcal{M}$

(b) $A - M \perp Z(\mathcal{M})$

(c) $M = B + P_{Z(\mathcal{M})} (A-B)$

(c) $\Rightarrow$ (b) $\langle$ když $M = B + P_{Z(m)}(A-B)$ pak

$$A - M = A - B - P_{Z(m)}(A-B) = P_{Z(m)^\perp}(A-B) \perp Z(m)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) $\quad A - M \perp Z(m)$ jiné body M jsou tvaru $M+u,\ u \in Z(m)$;

$$\|\underbrace{A - M}_{\in U^\perp} - \underbrace{u}_{\in U}\|^2 = \|A-M\|^2 + \|u\|^2 \geq \|A-M\|^2$$

Vzdálenost se minimalizuje v bodě M.

$$\langle a u, u \rangle = \langle A - B, u \rangle$$

$$a = \frac{\langle A - B, u \rangle}{\|u\|^2} = \frac{a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{dist}(A, \pi) = \| a u \| = \frac{|a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \|u\| =$$

$$= \frac{|a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{|a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$