Vlastní vektory a vlastní čísla

$\varphi : U \longrightarrow U$ lin. operátor

$V \subseteq U$ je invariantní, jestliže $\varphi(V) \subseteq V$.

<u>jednorozměrné invariantní podprostory</u>

$V = [v]$, $v \neq \vec{o}$

$\varphi(V) \subseteq V \implies \varphi(v) = \lambda v$

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

S každým invariantním podprostorem V dim 1 je spojeno nějaké $\lambda \in K$ takové, že pro všechna $v \in V$ máme $\varphi(v) = \lambda v$.

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda (id)_{\alpha,\alpha}\right)(v)_\alpha = 0 \qquad (v)_\alpha = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

$$(A - \lambda E)\, x = 0$$

jelikož $v \neq \vec{o}$, je $x \neq 0$. Soustava

$$(A - \lambda E)\, x = 0$$

je homogenní a nutná a postačující podmínka, aby měla jiné než nulové řešení je

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \text{polynom v proměnné } \lambda \text{ stupně } = (-1)^n \lambda^{n} + \dots + \det A \cdot 1$$

Buďte α a β dvě báze v U, položme

$$A = (\varphi)_{\alpha,\alpha} \qquad B = (\varphi)_{\beta,\beta}$$

Platí

$$B = (\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\beta} = P^{-1}AP$$

Ukážeme, že char. polynomy matic A a B, které jsou podobné, jsou stejné

$$\det(B-\lambda E) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP\right) = \det P^{-1}(A-\lambda E)P =$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det P =$$

součin $= 1$

$$= \det(A-\lambda E)$$

Definice x_0 je kořen násobnosti k polynomu p, jestliže

$$p(x) = (x - x_0)^k \, q(x)$$

kde $q(x_0) \neq 0$

Je-li p polynom stupně n, pak součet násobností jeho kořenů je $\leq n$

Je-li p polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$, pak má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů, pokud je počítáme tolikrát kolikrát je jejich násobnost

Hledání kořenů u polynomů s koeficienty v $\mathbb{Z}$.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

~~má kořen~~ Má-li takový polynom kořen v $\mathbb{Q}$ tvaru $\frac{r}{q}$, kde r a q jsou nesoudělná celá čísla, pak r / a_0 (dělí) ...

$$\varphi(v) - \lambda v = 0$$

$$(\varphi - \lambda id)\, v = 0$$

$$\emptyset \neq v \in \ker(\varphi - \lambda id) \Rightarrow \dim \ker(\varphi - \lambda id) \geq 1$$

Podprostor $\ker(\varphi - \lambda id)$ pro vlastní číslo λ se nazývá vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ. Jeho nenulové prvky jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ.

$$\ker(\varphi - \lambda id) = \{v \in U,\ (\varphi - \lambda id)v = 0\} = \{v \in U,\ \varphi(v) = \lambda v\}$$

Každý vlastní podprostor je invariantní.

(2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) =: Bx$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla jsou kořeny char. polynomu

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

2 je vlastní číslo alg. násobnosti $\underline{\underline{3}}$

$$(B - 2E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

Řešení $x = (t, s, 0)^T$

$\dim \ker(B - 2E) = 2$

geom. ~~d~~ násobnost je $\underline{\underline{2}}$

Věta. Geometrická násobnost vlastního čísla je $\leq$ algebraické násobnosti.

Důkaz. λ_0 vlastní číslo operátoru φ

Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 id)$

tj. geom. násobnost $\lambda_0 = k$.

Doplníme bázi $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 id)$ na bázi celého prostoru U

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

Matice operátoru α v této bázi bude

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \lambda_0 & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & & & 0 & C \end{array}\right) \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k$$

$\varphi(u_1) = \lambda_0 u_1$

$\varphi(u_2) = \lambda_0 u_2$

$\dots$

$\varphi(u_k) = \lambda_0 u_k$

Věta: Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ navzájem různá vlastní čísla operátoru φ s vlastními vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$, pak $u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou lin. nezávislé

Dk.: Indukcí podle k

$k = 1$, pak $u_1 \neq \vec{o}$ a je tedy lin. nezávislé

Nechť věta platí pro $k-1 \geq 1$. ~~Potom~~

Mějme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{k-1}, \lambda_k$ různá vl. čísla, $u_1, \ldots u_k$ příslušné vlastní vektory. Chceme ukázat, že jsou lin. nezávislé

Nechť

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = \vec{o} \qquad (1)$$

Aplikujme na tuto rovnici zobrazení φ

Z tvrzení (!) dostaneme

$$a_k u_k = \vec{o}$$

Protože $u_k \neq \vec{o}$, je $a_k = 0$. Tím jsme dokázali, že $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou LN

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor. Nechť součet geom. ~~[illegible]~~ násobností jeho vlastních čísel je roven $\dim U$. Potom v U existuje báze α tvořená vlastními vektory a v této bázi je matice operátoru φ

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde λ_i jsou vlastní čísla (každé je napsáno tolikrát, kolik činí jeho geom. násobnost)