# Požadavky ke zkoušce (1)

1. písemky na cvičeních — 8× po 2 bodech — max 16 bodů
   je potřeba — 8 bodů
   oprava na začátku zkouškového

Ke zkoušk. písemce se přičte $\frac{1}{2}$(počet bodů − 8)

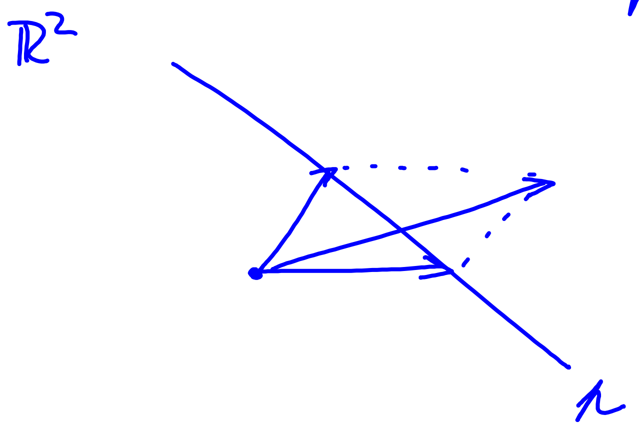
2, Zkoušk. písemka — početní za 12 b, je potřeba 7 (kde jsou i body ze cv)
teoretická za 10 b, je potřeba 5

3) Ústní zkouška (v ISu je individuální osnova na konci seznam věcí, které musíte umět)

# ② Afinní geometrie

Vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$: počátek, přímky procházející počátkem, $\mathbb{R}^2$

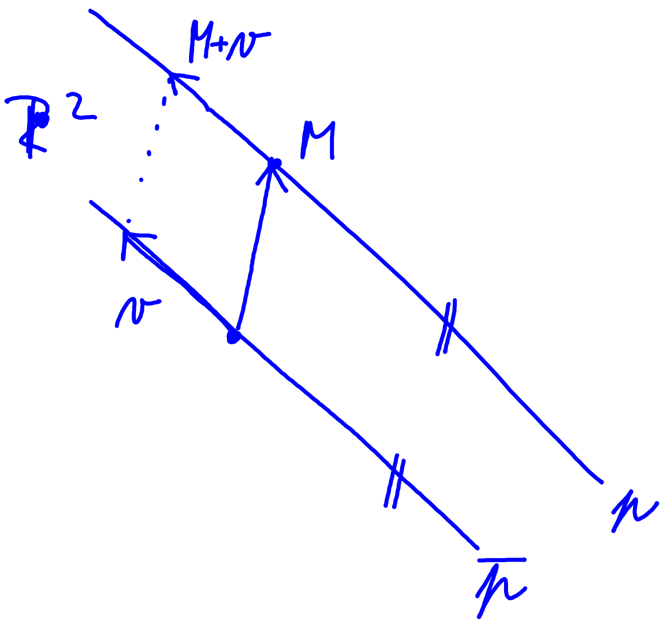
v $\mathbb{R}^3$: počátek, přímky přes počátek, roviny přes počátkem, celé $\mathbb{R}^3$




Chceme definovat pojem, který by zahrnoval i přímky a roviny, které počátkem neprochází

$\Rightarrow$ AFINNÍ PODPROSTOR

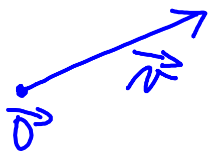
35




$$p = \{ M + v,\ v \in \bar{p} \}$$
$$= M + \bar{p}$$

**Definice:** Nechť $U$ je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Jeho prvky jsou vektory, ale někdy jim budeme říkat body

$U = \mathbb{R}^2$



4

Afinní podprostor $\mathcal{M}$ vektorového prostoru $\mathcal{U}$ je neprázdná podmnožina prostoru $\mathcal{U}$, která je tvaru

$$\mathcal{M} = P + \mathcal{V},$$

kde $P \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ je vekt. podprostor.

Příklady:

- v $\mathbb{R}^2$: každý bod je afinní podprostor $P = P + \{\vec{o}\}$
  každá přímka je tvaru $p: X = P + tv$, $v \neq \vec{o}$
  celé $\mathbb{R}^2$ je tvaru $\mathbb{R}^2 = P + \mathbb{R}^2$.

  Tohle , všech af v $\mathbb{R}$

- Obdobně v $\mathbb{R}^3$.

5

• $M = \{ x \in \mathbb{R}^n, \ Ax = b \}$ $A$ je matice $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^k$

Je-li $M$ neprázdná, je to afinní podprostor.

$$M = \{ x_0 + y \in \mathbb{R}^n ; \ x_0 \text{ je jedno řešení } Ax = b, \ y \text{ je libovolné řešení } Ay = 0 \}$$

$\{ y \in \mathbb{R}^n, \ Ay = 0 \}$ je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^n$

Věta: Vekt. podprostor v definici afinního podprostoru je určen afinním podprostorem JEDNOZNAČNĚ.

Důkaz: Nechť $M = P_1 + V_1 = P_2 + V_2$. Chceme dokázat, že $V_1 = V_2$.

6

Dokažme $V_1 \subseteq V_2$.

$v_1 \in V_1 \quad \exists v_2 \in V_2 : P_1 + v_1 = P_2 + v_2$

$\exists \tilde{v}_2 \in V_2 \quad P_1 = P_1 + \vec{o} = P_2 + \tilde{v}_2$

Odečtením:

$v_1 = P_1 + v_1 - P_1 = P_2 + v_2 - P_2 - \tilde{v}_2 = v_2 - \tilde{v}_2 \in V_2$

Tedy $v_1 \in V_2$ a dokázali jsme  neboť $V_2$ je vekt. podprostor

$V_1 \subseteq V_2$

Analogicky se dokáže $V_2 \subseteq V_1$.

Definice: Je-li $M = P + V$, nazýváme $V$ zaměřením aff podprostoru $M$ a značíme $V = Z(M)$.

7

$$\dim \mathcal{M} \underset{def}{=} \dim Z(\mathcal{M})$$

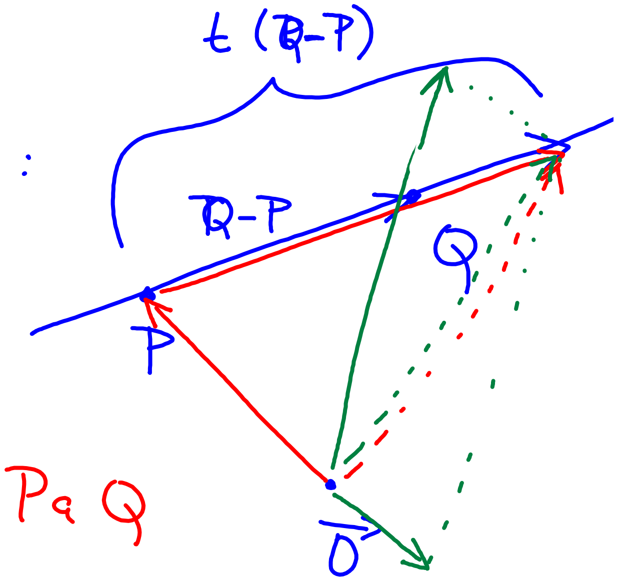
## AFINNÍ KOMBINACE BODŮ

$P, Q \in \mathcal{U}$

Přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ může být popsána takto:

$$P + t(Q-P) =$$

$$P + tQ - tP = \underbrace{(1-t)P + tQ}_{\text{afinní kombinace bodů } P \text{ a } Q}$$



8

Afinní kombinace bodů P a Q je lineární kombinace

$$aP + bQ$$

kde $a + b = 1$.

Afinní kombinace bodů $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ je lin. kombinace

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n$$

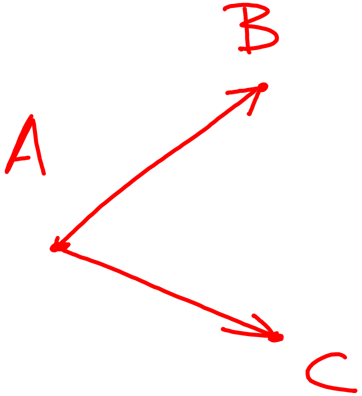
taková, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1.$$

- $P = Q$, každá afinní kombinace je nějaký bod $P = Q$.
  $P \neq Q$, afinní kombinace vyplní přímku $\overleftrightarrow{PQ}$.

9

Afinní kombinace 3 bodů, které neleží v přímce




$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

$$t_1A + t_2B + t_3C = (1 - t_2 - t_3)A + t_2B + t_3C =$$

$$= A - t_2A - t_3A + t_2B + t_3C = A + t_2(B-A) + t_3(C-A)$$

10

**Věta:** Je-li $\mathcal{M}$ afinní podprostor, pak platí

$$\forall P, Q \in \mathcal{M} \quad (1-t)P + tQ \in \mathcal{M}$$

(obecně pro $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{M}$, je i jejich afinní kombinace opět v $\mathcal{M}$

**Dů:** $\mathcal{M} = R + \mathcal{V}$, kde $\mathcal{V}$ je vektorový podprostor v $\mathcal{U}$

$P \in \mathcal{M} \quad \exists\, v \in \mathcal{V} \qquad P = R + v$

$Q \in \mathcal{M} \quad \exists\, u \in \mathcal{V} \qquad Q = R + u$

$$(1-t)P + tQ = (1-t)(R+v) + t(R+u) = (1-t)R + (1-t)v + tR + t$$
$$= R + (1-t)v + tu \in \mathcal{M} \text{ neboť } (1-t)v + tu \in \mathcal{V}$$

11

## Obrácená věta:

Nechť $\mathcal{M}$ je neprázdná podmnožina prostoru $\mathcal{U}$ s vlastností:

$$\forall P, Q \in \mathcal{M} \quad \text{je} \quad (1-t)P + tQ \in \mathcal{M}.$$

Potom je $\mathcal{M}$ afinní podprostor.

Důkaz. Nechť $R \in \mathcal{M}$ je pevný bod z $\mathcal{M}$. Definujme

$$\mathcal{V} = \{P - R \in \mathcal{U},\ P \in \mathcal{M}\}$$

Potom určitě platí

$$\mathcal{M} = R + \mathcal{V} = R + \{P - R,\ P \in \mathcal{M}\}$$

12

Musíme ukázat, že $V$ je vekt. podprostor.

$$v \in V \qquad v = P - R, \quad P \in M, \quad R \in M$$

$$tv = tP - tR = \underbrace{tP + (1-t)R}_{\substack{\text{afinní kombinace} \\ \text{proto } \in M}} - R \in V$$

$$v_1, v_2 \in V \qquad v_1 = P - R, \quad v_2 = Q - R$$

$$v_1 + v_2 = P - R + Q - R = \underbrace{\left[2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q}_{\in M}\Big) - R\right]}_{\in M} - R \in V$$

$V$ je vekt. podprostor.

13

## Ekvivalentní definice afinního podprostoru.

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ neprázdná je afinní podprostor, když je s každými dvěma různými body $P, Q$ obsahuje i přímku $\overleftrightarrow{PQ}$.

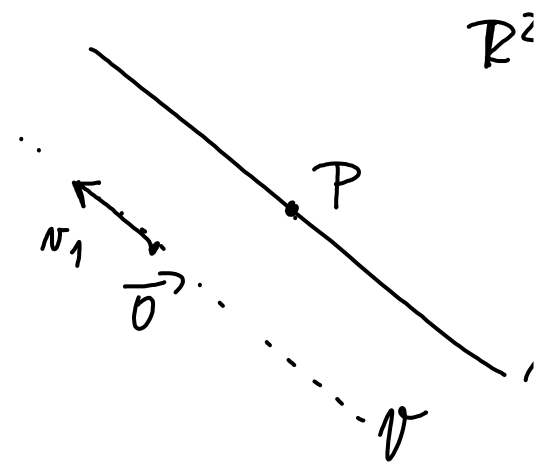
## Počítání s af. podprostory

- parametrický
- implicitní pomocí soustavy rovnic

## Parametrický popis

$\mathcal{M} = P + V$, $V \leq \mathcal{U}$ vekt. podprostor s bází $v_1, v_2, \dots, v_k$

14




Každý bod $M \in \mathcal{M}$ je tvaru

$$M = P + v, \quad v \in V$$

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

Tedy

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k,$$

$t_1, t_2, \dots, t_k$ jsou libovolná čísla z $\mathbb{K}$

Bod $P$ a $k$-tici vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ je nazývá afinní báze afinního podprostoru $\mathcal{M}$
$k$-tice čísel $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ se nazývá souřadnice bodu $M \in \mathcal{M}$ v afinní bázi $(P, v_1, v_2, \dots, v_k)$

(15)

Priamka v $\mathbb{R}^3$

$$p: \quad M = P + t v \quad , \quad v \neq \vec{0}$$

$$p = P + [v]$$

Rovina v $\mathbb{R}^3$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, lin. nezávislé

$$M = P + t_1 u + t_2 v$$

$$x_1 = p_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1$$
$$x_2 = p_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2$$
$$x_3 = p_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3$$

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

16

# MPLICITNÍ POPIS

$Ax = 0$

$n - h(A)$

$U$ vekt. prostor, báze $(e_1, e_2, \dots, e_n) = \varepsilon$

$$M = \{ u \in U, \ A(u)_\varepsilon = b \} \text{ kde } A \text{ je matice } k \times n$$

$b \in \mathbb{K}^k \quad h(A|b)$

$$= \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in U, \ Ax = b \}$$

je afinní podprostor popsaný implicitně.

<u>Příklady:</u> $\{ x \in \mathbb{R}^3, \ a x_1 + b x_2 + c x_3 = d \}$ $\quad (a, b, c) \neq (0,0,0)$

je rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3, \ \begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \end{matrix} \right\} \quad h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$$

17

Přechod od implicitního zápisu k parametrickému je jednoduchý: stačí vyřešit soustavu pomocí parametrů

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = b \rightsquigarrow \text{řešení}$$

$$M = (3+7p+9q,\ -1+p,\ -10+q,\ p+2q)$$

$$M = \begin{pmatrix}3\\-1\\-10\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}7\\1\\0\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}9\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$P + p\,v_1 + q\,v_2$$

18

Obrácený postup je o něco složitější.

Máme $M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \subseteq U$

V $U$ máme bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Chceme najít matici $A$ a $b$ tak, že

$$M = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in U,\ Ax = b\}$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_k) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{array}{cc} & k \\ n & \boxed{C} \end{array}$$

$$P = (e_1, e_2, \dots e_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

19

$$M = (e_1, e_2, \dots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i = (e_1, e_2, \dots, e_m)\begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ \\ t_k \end{pmatrix} +$$

$$+ (e_1, e_2, \dots, e_m)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ c \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$Ex = Ct + c \qquad (E \mid C \mid c)$$

$$(E|C|c) \xrightarrow[\text{řádk. úpravy}]{\text{přeřadíme}} \left( \begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & d \\ \hline A & 0 & b \end{array} \right)$$

$C_1$ je matice ve schod. tvaru bez nulového řádku

20

Z úpravy je zřejmé, že

$$Ex = Ct + c \iff \begin{array}{l} A_1 x = C_1 t + d \\ A x = 0 \cdot t + b = b \end{array}$$

Jestliže pro $x$ platí $x = Ct + c$, pak $Ax = b$.

Obráceně: nechť $Ax = b$. pak soustava pro neznámé $t$

$$A_1 x - d = C_1 t$$

má řešení neboť $C_1$ je ve schod. tvaru a nemá nul. řádek.

Pro toto řešení platí

$$\begin{array}{l} A_1 x = C_1 t + d \\ A x = b \end{array} \implies x = Ct + d$$