Dokončení AFINNÍ GEOMETRIE

M afinní podprostor ve vekt. prostoru U

(1) $M = P + V$ $\quad V \subseteq U$ vekt. podprostor

(2) neprázdná podmnožina U taková, že

$X, Y \in M \quad tX + (1-t)Y \in M$

Parametrický popis $\quad X = P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k, \quad v_1 \dots v_k$ báze V

Implicitní popis $\quad$ je dán soustavou rovnic $\quad Ax = b$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů ② M a N

- definujeme podle dvou kritérií

  ∘ je $M \cap N = \emptyset$?

  ∘ je zaměření jednoho podprostoru pod zaměřením druhého podprostoru $Z(M) \subseteq Z(N)$ nebo $Z(N) \subseteq Z(M)$

Tím dostáváme 4 možnosti pro vzájemnou polohu

(1) Jeden prostor je podmnožinou druhého

$$M \subseteq N \text{ nebo } N \subseteq M$$

$$(M \cap N \neq \emptyset,\ Z(M) \subseteq Z(N) \text{ nebo } Z(N) \subseteq Z(M))$$

(2) Podprostory jsou rovnoběžné: $M \cap N = \emptyset$, $Z(M) \subseteq Z(N)$ nebo $Z(N) \subseteq Z($

3) m a n jsou různoběžné

$$m \cap n \neq \emptyset \quad \text{a} \quad Z(m) \not\subseteq Z(n) \ \text{ani} \ Z(n) \not\subseteq Z(m)$$

(4) m a n jsou mimoběžné

$$m \cap n = \emptyset \quad \text{a} \quad Z(m) \not\subseteq Z(n) \ \text{ani} \ Z(n) \not\subseteq Z(m)$$

<u>Příklad</u> Rovina ρ a přímka p v $\mathbb{R}^3$

(1) $p \subset \rho$

(2) $p \parallel \rho$

(3) p a ρ různoběžné $\quad p \cap \rho =$ jediný bod $\qquad Z(p) + Z(\rho) = \mathbb{R}^3$

(4) mimoběžnost nenastane $\quad Z(p) \not\subseteq Z(\rho)$

(4)

jestliže $Z(p) + Z(\rho) = \mathbb{R}^3$, pak $p \cap \rho$ je neprázdný.

$p: \quad X = P + t_1 v_1$

$\rho: \quad Y = R + t_2 v_2 + t_3 v_3$

$[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$

v_1, v_2, v_3 jsou LN

$p \cap \rho \qquad X = Y$

$$P + t_1 v_1 = R + t_2 v_2 + t_3 v_3$$

$$t v_1 - t_2 v_2 - t_3 v_3 = R - P$$

$$\left(\underbrace{v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3}_{\det \neq 0} \,\middle\|\, R - P \right)$$

Soustava má vždy jedno řešení

Stejně lze dokázat, že v $\mathbb{R}^4$ přímka a 3. dim af. podprostor nemohou být mimoběžné

5

Příklad dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, které jsou mimoběžné

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha : X = A + t_1 e_1 + t_2 e_2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta : Y = B + s_1 e_2 + s_2 e_3, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(\alpha) = [e_1, e_2] \not\subseteq [e_2, e_3]$$

$$Z(\beta) = [e_2, e_3] \not\subseteq [e_1, e_2]$$

$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

viz 4. souřadnice

$$Z(\alpha) \cap Z(\beta) = [e_1, e_2] \cap [e_2, e_3] = [e_2]$$

6

Operace s afinními podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

Jestliže $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, pak je $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ afinní podprostor

$P \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, pak

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = P + Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$$

SPOJENÍ AFINNÍCH PODPROSTORŮ

$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ $\qquad \mathcal{M} = M + Z(\mathcal{M}) \qquad \mathcal{N} = N + Z(\mathcal{N})$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = M + \underbrace{Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) + [N-M]}_{\text{zaměření } \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}}$$

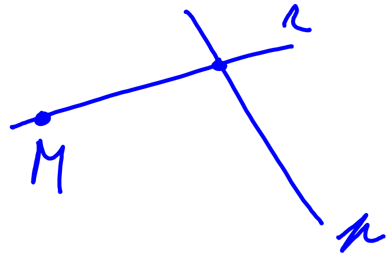
$M \sqcup N$ je nejmenší afinní podprostor obsahující M i N

Úlohy typu: najděte afinní podprostor daných vlastností

Úloha v $\mathbb{R}^3$: zadány mimoběžky p a q a bod M

Najděte přímku r tak, že $M \in r$, $r \cap p \neq \emptyset$
$r \cap q \neq \emptyset$

Předp. že r máme.



r a p mají rovinu $\alpha = r \sqcup p = M \sqcup p$

$r \cap q \neq \emptyset \quad \alpha \cap q \supseteq r \cap q$

$\alpha \cap q \neq \emptyset$ Další bod přímky r je v průniku $\alpha \cap q$.

8

Řešení: Najdeme $\alpha = M \sqcup p$, spočítame $\alpha \cap q \ni P$

a $r = \overleftrightarrow{MP} = M + t(P-M)$

Úloha v $\mathbb{R}^4$: dána rovina ρ, přímka p a bod M

Najděte přímku r tak, že $M \in r$, $r \cap \rho \neq \emptyset$

$r \cap p \neq \emptyset$

r a p mají průnik, tedy určují 2-dim af podprostor – rovinu α

$\alpha = M \sqcup p$

$r \cap \rho \subseteq \alpha \cap \rho$ Další bod přímky r hledáme v $\alpha \cap \rho$.

Řešení: Najdeme $\alpha = M \sqcup p$, spočítáme $\alpha \cap \rho \ni P$, $r = \overleftrightarrow{MP}$

Afinní zobrazení Nechť $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ a $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ jsou afinní podprostory. Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ se nazývá afinní, jestliže $\forall X, Y \in \mathcal{M}$

$$\Phi(tX+(1-t)Y) = t\,\Phi(X)+(1-t)\,\Phi(Y)$$

Příklad. $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, $b \neq 0$

$$\varphi(tx+(1-t)y) = a(tx+(1-t)y)+b = tax+(1-t)ay+b$$

$$t\,\varphi(x)+(1-t)\,\varphi(y) = t(ax+b)+(1-t)(ay+b) = tax+(1-t)ay+\overbrace{tb+(1-t)b}$$

10

Obdobně se ukáže, že $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^k$

$$\Phi(x) = \underline{A x} + b$$

A je matice $k \times n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

je rovněž afinní zobrazení

<u>VĚTA</u>: Je-li $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ afinní zobrazení, pak existuje lin. zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{N})$ tak, že

$$\forall v \in Z(\mathcal{M}) : \Phi(P + v) = \Phi(P) + \varphi(v)$$

Platí i obrácené tvrzení.

(11)

<u>Důkaz:</u> Nechť Φ je afinní zobrazení. Definujme

$$\varphi(v) = \Phi(P+v) - \Phi(P) \quad \text{pro } v \in Z(M)$$

Potom
$$\Phi(P+v) = \Phi(P) + \varphi(v)$$

Stačí ukázat, že takto definované zobrazení φ je lineární.

$v_1, v_2 \in Z(M)$ chceme dk, že $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2)$

$$\varphi(v_1+v_2) \underset{def}{=} \Phi(P+v_1+v_2) - \Phi(P) = \Phi\left[2\left[\tfrac{1}{2}(P+v_1)+\tfrac{1}{2}(P+v_2)\right] - 1\cdot P\right.$$

$$-\Phi(P) = 2\Phi\left(\tfrac{1}{2}(P+v_1)+\tfrac{1}{2}(P+v_2)\right) - \Phi(P) - \Phi(P) = 2\left[\tfrac{1}{2}\Phi(P+v_1)+\tfrac{1}{2}\Phi(P+v_2\right.$$

(12)

$$-\phi(P) = \underbrace{\phi(P+v_1)-\phi(P)} + \underbrace{\phi(P+v_2)-\phi(P)} \underset{def}{=} \varphi(v_1)+\varphi(v_2)$$

13

Bilineární formy

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Lineární forma na U je lineární zobrazení $f: U \to \mathbb{K}$

Bilineární forma je zobrazení $f: U \times U \to \mathbb{K}$ takové, že platí

$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2, v \in U \quad f(au_1 + bu_2, v) = a f(u_1, v) + b f(u_2, v)$

linearita v 1. složce

$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2, v \in U \quad f(v, au_1 + bu_2) = a f(v, u_1) + b f(v, u_2)$

14

Příklady. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = f(x,y)$$

tj. bilineární forma

y pevné

$$f(x,y) = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$$

tj. lin. zobrazení v x

x pevné

$$f(x,y) = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)y_2 = d_1y_1 + d_2y_2$$

tj. lin. zobrazení v y.

15

$$f(e_1,e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = a_{11}\,1\cdot 1 + a_{12}\,1\cdot 0 + a_{21}\,0\cdot 1 + a_{22}\,0\cdot 0 = a_{11}$$

$$f(e_1,e_2) = a_{12}$$

$$f(e_i,e_j) = a_{ij}$$

Obecně: $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$$ je bilineární forma na $\mathbb{R}^n$

Jiný příklad: $U = \mathbb{R}_n[x]$ $\quad f(p,q) = p(2)\cdot q(4)$

je opět bilin. forma

V předchozím příkladu je

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T A\, y$$

V tomto případě platí

$$f(e_i, e_j) = a_{ij}$$

Nechť $f : U \times U \to \mathbb{K}$ je bilineární forma a nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je báze ve vekt. prostoru U. MATICE BILIN. FORMY f v bázi α

17

matice A se složkami $a_{ij} = f(u_i, u_j)$

Potom pro každé dva vektory $u, v \in U$ platí

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$$

$$\underline{f(u,v)} = f\left(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\right) = \sum_i x_i\, f\left(u_i, \sum_j y_j u_j\right)$$

$$= \sum_i x_i \sum_j y_j \underbrace{f(u_i, u_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \underline{x^T A y = (u)_\alpha^T A}$$

18

Změna matice bilin. formy při změně báze

$f : U \times U \to \mathbb{K}$ $\quad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$u, v \in U \qquad (u)_\alpha = x \qquad (u)_\beta = \overline{x}$

$$f(u,v) = x^T A y \quad (*)$$

$(v)_\alpha = y \qquad (v)_\beta = \overline{y}$

$$= \overline{x}^T B \overline{y}$$

Chceme najít vztah mezi A a B

$$(u)_\alpha = (id)_{\alpha\beta} \cdot (u)_\beta$$

$\left.\begin{array}{l} x = P\overline{x} \\ y = P\overline{y} \end{array}\right\}$ dosadíme do rovnice $(*)$

$$\underline{\overline{x}^T B \overline{y}} = f(u,v) = x^T A y \underset{\text{dosazujeme}}{=} (P\overline{x})^T A (P\overline{y}) = \underline{\overline{x}^T P^T A P \overline{y}}$$

jestliže $\bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}(P^T A P)\bar{y}$,

pro všechna $x, y \in \mathbb{K}^n$, pak

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Volbou $x = e_i$, $y = e_j$ dostaneme

$$e_i^T B e_j = B_{ij}$$

$$e_i^T (P^T A P) e_j = (P^T A P)_{ij}$$

Mnohokrát použijeme

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n \quad x^T S y = x^T R y \implies S = R$$

20

Věta: Nechť matice bilin. formy f v bázi α .... A, a v bázi β ... B je následující

$$B = P^T A P,$$

kde $P = (id)_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}$ je matice přechodu.

Čtvercové matice A, B nazveme kongruentní, jestliže existuje regulární matice P tak, že

$$B = P^T A P$$

Podobné matice A a B, existuje reg. matice P tak, že

$$B = P^{-1} A P.$$