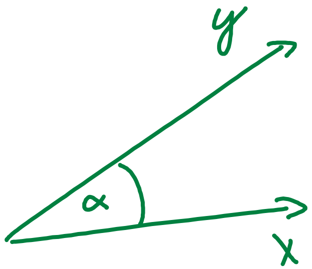
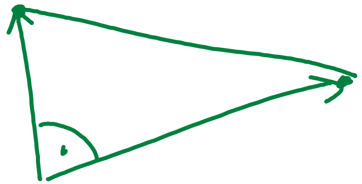
Prostor: se skalárním součinem

Motivace: x, y dva vektory v R^3





Vektory x a y svírají pravý úhel.
Pak

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$\cancel{x_1^2} \underline{-2x_1y_1} + \cancel{y_1^2} + \cancel{x_2^2} \underline{-2x_2y_2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{x_3^2} \underline{-2x_3y_3} + \cancel{y_3^2} = \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{x_3^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{y_3^2}$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

2

Výraz $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ nazveme skalárním součinem vektorů x a y

$$f(x,y) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \quad , \quad f(x,x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je SYMETRICKÁ, POZITIVNĚ DEFINITNÍ BILINEÁRNÍ FORMA

Zobecnění na libovolný reálný vekt. prostor

Definice Nechť U je reálný vekt. prostor. Skalárním součinem na U je symetrická bilin. forma $\langle \, , \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$ taková, že příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní, tj. platí

(2) $\langle u, av+bw \rangle = a\langle u,v \rangle + b\langle u,w \rangle$

(1) $\langle au+bw, v \rangle = a\langle u,v \rangle + b\langle w,v \rangle$

⋮

3

3). $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ symetrie

4). $\langle u,u\rangle > 0$ pro $u \neq \vec{0}$

Definice skal součinu na kompl. vekt. prostorech

V, vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$ je skalární součin na U, jestliže platí

(1) $\langle au + bw,\ v\rangle = a\langle u,v\rangle + b\langle w,v\rangle$

(2) $\langle u, av + bw\rangle = \bar{a}\langle u,v\rangle + \bar{b}\langle u,w\rangle$

$\bar{a}$ je kompl. sdružené k $a = a_1 + ia_2$

$\bar{a} = a_1 - ia_2$

(3) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

(4) $\langle u,u\rangle > 0$ pro $u \neq \vec{0}$

$\left(\langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle} \Rightarrow \langle u,u\rangle \in \mathbb{R}\right)$

4

Příklady: $U = \mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ splňuje vlastnosti (1) – (4)

jiné skal. součiny

$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} x_i y_j$ $\quad \det A_i > 0 \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$

$a_{ij} = a_{ji}$

$\langle x, x \rangle$ je pozitivně definitní

$U = C[a, b]$ spojité funkce na intervalu $[a, b]$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$

5

Příklady nad $\mathbb{C}$

$U = \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$$

$\overline{y_i}$ je komplexně sdružené k y_i.

$$\langle x, ay+bz\rangle = \sum x_i \cdot \overline{(a y_i + b z_i)} = \sum x_i \cdot \overline{a}\,\overline{y_i} + \sum x_i \cdot \overline{b}\,\overline{z_i} =$$

$$= \overline{a} \sum x_i \overline{y_i} + \overline{b} \sum x_i \overline{z_i} = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, z\rangle$$

$$\langle x, x\rangle = \sum x_i \cdot \overline{x_i} = \sum |x_i|^2 > 0 \text{ pro } x \neq (0, 0, \dots, 0)$$

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ spojité

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx$$ skalární součin

6

Velikost vektoru

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

má smysl nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$

Cauchyova - Schwarzova nerovnost

Pro u, v platí

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\| ,$$

přičemž rovnost nastane právě když u a v jsou lin. závislé

Aplikace. $\mathbb{R}^n$ $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \le \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

7

Dokaz nad $\mathbb{R}$

Jasno, če je $u = \vec{0}$ velja v neenakosti enakost.

$$0 = \langle \vec{0}, v \rangle = \|\vec{0}\| \|v\| = 0.$$

Naj bo $u \neq \vec{0}$, potem

$$0 \leq \langle tu - v, tu - v \rangle = t^2 \langle u, u \rangle - t\langle u, v \rangle - t\langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle =$$

$$= t^2 \langle u, u \rangle - 2t \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = f(t)$$

$f(t)$ je kvadratična, vodilni člen v t vodilni $\langle u, u \rangle > 0$, zato $f(t) \geq 0$.
Zato njena diskriminanta je ≤ 0

$$D = \left(-2\langle u, v \rangle\right)^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0$$

8

$$4 \langle u, v \rangle^2 \leq 4 \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Jestliže nastane rovnost, pak $D = 0$ a existuje t tak, že

$$t u - v = \vec{0}$$

$$t u = v$$

u, v jsou lin. závislé

Trojúhelníková nerovnost

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle =$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

10

Podobným způsobem dostaneme tzv. rovnoběžníkové pravidlo.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Napište pomocí skal. součinu a upravte

<u>Nad $\mathbb{R}$</u> úhel dvou vektorů $u, v \in U$ je α, kde

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

Díky C-S. nerovnosti víme, že

$$-1 \le \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \le 1$$

(11)

Nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$

Vektory u a v jsou kolmé (ortogonální), jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Píšeme $u \perp v$.

S definicí úhlu můžeme jednoduše dokázat cosinovou větu

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \underbrace{2 \cos\alpha \, \|u\| \, \|v\|}_{2 \langle u, v \rangle}$$

Dostaneme, že $\langle u - v, u - v \rangle$.

(12)

Ortogonální systém vektorů je množina vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$ taková, že [illegible]

<u>Lemma</u> Jestliže $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou ortogonální a nenulové, pak jsou lineárně nezávislé.

Důkaz.

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{0}$

Tuto rovnici vynásobíme skalárně vektorem u_1

$$\langle a_1 u_1, u_1 \rangle + \langle a_2 u_2, u_1 \rangle + \dots + \langle a_k u_k, u_1 \rangle = \langle \vec{0}, u_1 \rangle$$

(13)

$$a_1\langle u_1,u_1\rangle + a_2\langle u_2,u_1\rangle + a_3\langle u_3,u_1\rangle + \dots + a_k\langle u_k,u_1\rangle = 0$$

$$\underset{>0}{\langle u_1,u_1\rangle} \qquad \langle u_2,u_1\rangle = 0 \qquad \langle u_3,u_1\rangle = 0 \qquad \langle u_k,u_1\rangle = 0$$

Tedy $a_1 = 0$. Analogicky nahrazením vektorem u_i dokážeme, že $a_i = 0$

Ortonormální vektory jsou vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ takové, že

$u_i \perp u_j$ pro $i \neq j$

$\|u_i\| = 1$

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE vekt. prostoru se skal. součinem je taková ortonormální vektory

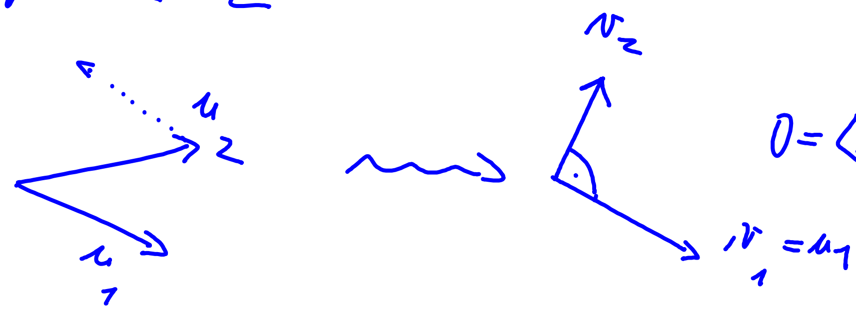
(14)

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

je algoritmus, který z k-tice lin. nezávislých vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ vytvoří k-tici ortogonálních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ s vlastností, že

$$[v_1, v_2, \ldots, v_i] = [u_1, u_2, \ldots, u_i] \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Obrázek pro $k = 2$



$$v_2 = u_2 - a\, v_1 \quad \Big| \langle \cdot, v_1 \rangle$$

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$a = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

15 17

Taková volba a definice $v_2 = u_2 - a v_1$ nám dá vektor v_2 kolmý k v_1

Důkaz indukcí:

Zvolíme $v_1 = u_1$.

Máme-li vektory $v_1, v_2, \ldots, v_i$, hledáme vektor v_{i+1} ve tvaru

$$v_{i+1} = u_{i+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \ldots - a_i v_i$$

Chceme, aby $\langle v_{i+1}, v_j \rangle = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, i$. Proto po násobení vektorem v_j dostaneme:

$$0 = \langle v_{i+1}, v_j \rangle = \langle u_{i+1}, v_j \rangle - a_1 \overset{0}{\langle v_1, v_j \rangle} - \ldots - a_j \overset{\neq 0}{\langle v_j, v_j \rangle} - \ldots - a_i \overset{0}{\langle v_i, v_j \rangle}$$

16

$$0 = \langle u_{i+1}, v_j \rangle - a_j \langle v_j, v_j \rangle$$

$$a_j = \frac{\langle u_{i+1}, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

Při této volbě bude v_{i+1} kolmé na v_j.

Zbývá dokázat indukcí, že

$$[v_1, \dots v_i] = [u_1, \dots u_i]$$

17

Příklad $\mathbb{R}^3$ $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,1,2)$

se standardním skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

$v_1 = (1,0,0)$

$v_2 = (1,2,0) - a(1,0,0) \quad / \langle \cdot, v_1 \rangle$

$0 = 1 - a\,1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow v_2 = (1,2,0) - (1,0,0) = (0,2,0)$

$v_3 = u_3 - b\,v_1 - c\,v_2 = (1,1,2) - b(1,0,0) - c(0,2,0)$

násobíme v_1

$0 = 1 - b\,1 \Rightarrow b = 1$ $\quad v_3 = (1,1,2) - (1,0,0) - \frac{1}{2}(0,2,0)$

násobíme v_2

$0 = 2 - c\,4 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ $\quad = (0,0,2)$

(18)

Věta: (o ortonormální bázi)

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$ ~~se skalárním~~ konečné dimenze se skalárním součinem. Potom

(1) v U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$

(2) Souřadnice vektoru u v ortonormální bázi $\alpha = (u_1, \ldots u_n)$ jsou

$$x_1 = \langle u, u_1 \rangle, \; x_2 = \langle u, u_2 \rangle, \ldots, x_n = \langle u, u_n \rangle$$

(3) Jestliže v orton. bázi α je $(u)_\alpha = (x_i)$, $(v)_\alpha = (y_j)$, pak

$$\langle u, v \rangle = \sum x_i \overline{y_i} = x^T \cdot \overline{y}$$

$$\underbrace{\sum \langle u, u_i \rangle \overline{\langle v, u_i \rangle}}_{} \qquad (x_1, \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

(19)

Důkaz (1)

Nechť $z_1, z_2, \ldots z_n$ je nějaká báze prostoru U. Podle GS ortogonalizačního procesu najdeme vektory $v_1, v_2, \ldots v_n$ ortogonální a takové, že $[v_1, v_2, \ldots v_n] = [z_1, \ldots z_n] = U$

Tedy $v_1, \ldots v_n$ generují U jsou ortogonální, tedy i lin. nezávislé. Položíme

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot v_i$$

$$\|u_i\|^2 = \left\langle \frac{1}{\|v_i\|} v_i, \frac{1}{\|v_i\|} v_i \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1.$$

$\|u_i\| = 1$, $u_1, \ldots u_n$ tvoří ortonormální bázi.

19

Důkaz 2 Nechť $u = \sum x_i u_i$, kde $u_1 \dots u_n$ je ortonormální báze

$$\langle u, u_j \rangle = \sum x_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\substack{0 \; i \neq j \\ 1 \; i = j}} = x_j$$

Důkaz 3 Nechť $u = \sum x_i u_i$, $v = \sum y_j u_j$, kde $u_1, u_2, \dots u_n$ je ortonormální báze.

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i u_i, y_j u_j \rangle =$$

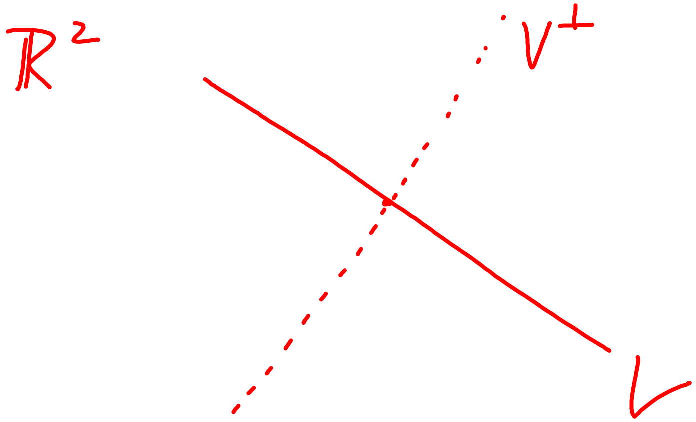
$$= \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

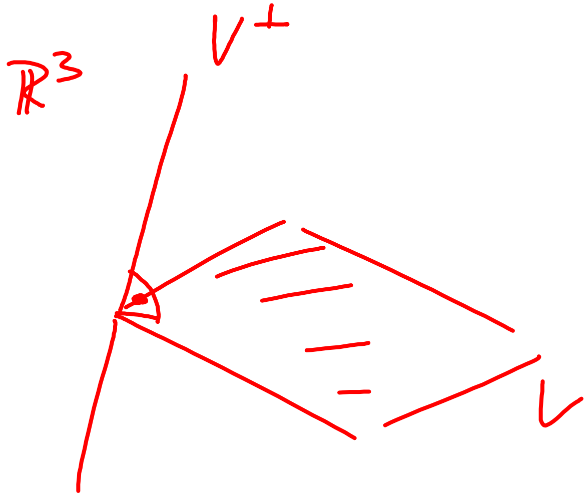
20

Řekneme, že dva podprostory $V, Z \subseteq U$ jsou k sobě kolmé, jestliže

$$\forall v \in V \quad \forall z \in Z \quad \langle v, z \rangle = 0.$$

<u>Ortogonální doplněk podprostoru V</u>





21

Definice kolmého (ortogonálního) doplňku.

Nechť $V \subseteq U$ je vektorový podprostor.

$$V^{\perp} = \{\, u \in U \,;\ (\forall v \in V)(\langle u, v \rangle = 0) \,\}$$

$u \perp v$

Věta: Je-li V podprostor v U se skalárním součinem, pak

$$U = V \oplus V^{\perp}$$

Důkaz: Každý vektor z U je tvaru $v + z$, kde $v \in V$, $z \in V^{\perp}$

Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_k$ je ortonormální báze ve V.

Tuto bázi můžeme rozšířit na ortonormální bázi celého U.

22

Dj na bázi $u_1, u_2, \ldots u_k, u_{k+1} \ldots u_n$.

Potom $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i}_{\in V} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} a_j u_j}_{\in V^\perp}$

Zbývá dokázat, že

$$V \cap V^\perp = \{0\}$$

Když $v \in V \cap V^\perp$, pak $v \perp v$, $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$