10. AFINNÍ GEOMETRIE

Afinní podprostor prostoru $\mathbf{K^n}$ je množina $M = P + [u_1, ..., u_k]$, kde $P \in \mathbf{K^n}, u_i \in \mathbf{K^n}$. Každý prvek $x \in M$ můžeme jednoznačne napsat ve tvaru

$$x = P + \sum_{i=1}^{k} t_i u_i$$

kde $t_1, ...t_k \in \mathbf{K}$ jsou parametry. Toto vyjádření se nazývá parametrické vyjádření nebo parametrická rovnice podprostoru M.

Afinní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic

$$Ax = b$$

kde $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{K}), b \in \mathbf{K^m}$. Množina řešení této soustavy $\{x; Ax = b\}$ je buď $\emptyset$ nebo afinní podprostor. Toto vyjáření se nazývá obecná rovnice afinního podprostoru.

Zaměřením afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K}$ nazýváme vektorový podprostor

$$\mathrm{Dir}\ M = [u_1, ..., u_k]$$

Dimenzí afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K^n}$, ozn. $\dim M$, nazýváme dimenzi jeho zaměření, tedy

$$\dim M = \dim \mathrm{Dir}\ M$$

Nechť S, T jsou dva podprostory afinního prostoru $\mathbf{V}$. Řekneme, že podprostory S a T jsou rovnoběžné, jestliže buďto Dir $S \subseteq$ Dir T nebo Dir $T \subseteq$ Dir S (rovnoběžné podprostory tedy mohou i splývat). Dále řekneme, že tyto proprostory jsou různoběžné, mají-li alespoň jeden společný bod a přitom nejsou rovnoběžné. Konečně řekneme, že tyto podprostory jsou mimoběžné, jestliže nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Příklad: Určete parametrické rovnice podprostoru M zadaného rovnicemi

$$\begin{aligned} M:\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do matice, kterou nejprve pomocí EŘO upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Z upravené matice získáme parametrický popis následujícím způsobem: Vedoucí členy řádků se nacházejí v prvním a druhém sloupci, proto si neznámé x_3 a x_4 zvolíme za parametry a neznámé x_1 a x_2 pomocí nich vyjádříme. Zvolíme-li $x_4 = t, x_3 = s$, potom $x_2 = 6 - s + t, x_1 = 3$. Parametrická rovnice pak má tvar

$$\begin{aligned} M: x_1 &= 3 \\ x_2 &= 6 - s + t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Příklad: Najděte obecné rovnice afinního podprostoru M vektorového prostoru $\mathbf{R^4}$, kde $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 2) + t_1(1, -1, 0, 0) + t_2(1, 2, 0, -1)$.

Řešení: Parametrické rovnice $x = P + \alpha t$ přepíšeme do tvaru $Ex = \alpha t + P$, kde $P = (1, 0, 2, 2)$ je bod a $\alpha = ((1, -1, 0, 0), (1, 2, 0, -1))$ vektory, které tvoří afinní podprostor M, a $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ je vektor neznámých a $t = (t_1, t_2)$ vektor parametrů. Soustavu rovnic $Ex = \alpha t + P$ přepíseme do matice tvaru $(E|\alpha|P)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Matici budeme upravovat pomocí EŘO tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Obecné rovnice podprostoru M určují koeficienty levého a pravého bloku, a to v řádcích, ve kterých jsou v prostředním bloku samé nuly. Tedy

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Dosazením se přesvědčíme, že bod P této soustavě skutečně vyhovuje.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R^4}$ zjistěte vzájemnou polohu podprostorů

(a) $\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$
$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -2,$

(b) $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$p : (3, -1, 0, 0) + t(-3, 2, 1, 1),$

(c) $\rho : (3, -1, 0, 0) + s(-1, 1, 1, 0) + t(2, 1, 0, 1)$,
$p : (3, 1, 0, 0) + r(-1, 2, 1, 1)$.

Řešení: (a) Hledáme společný bod podprostorů π a ρ, tj. bod $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, jehož souřadnice splňují rovnice podprostoru π i ρ. Řešíme tedy systém rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -3 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Pomocí EŘO upravíme jeho rozšířenou matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & | & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

ze kterého dostáváme $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$, což je jediné řešení daného systému. Podprostory π, ρ jsou tedy různoběžné a jejich průsečíkem je bod $R = (1, 0, 1, -1)$.

(b) Bod Q leží na přímce p, pokud $Q = (3 - 3t, -1 + 2t, t, t), t \in \mathbf{R}$. Aby bod Q ležel i v rovině ρ, musí jeho souřadnice splňovat rovnici roviny ρ, tedy musí platit

$$\begin{aligned} 3 - 3t + 2(-1 + 2t) + -t &= 1 \\ 3 - 3t + t + 2t &= 3 \end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravou dostaneme rovnici

$$0 \cdot t = 0$$

která je splněna pro každé $t \in \mathbf{R}$. To znamená, že každý bod přímky p je zároveň bodem roviny ρ, tedy přímka p leží v rovině ρ.

(c) Bod Q leží v rovině ρ, pokud $Q = (3 - s + 2t, -1 + s + t, s, t)$, a leží na přímce p, pokud $Q = (3 - r, 1 + 2r, r, r)$. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -s + 2t + r &= 3 - 3 \\ s + t + 2r &= 1 + 1 \\ s - r &= 0 \\ t - r &= 0 \end{aligned}$$

Její rozšířenou matici upravíme pomocí EŘO na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Soustava nemá řešení, tzn. že $\rho \cap p = \emptyset$. Vyřešíme-li tuto soustavu jako homogenní, zjistíme, že vektory určující zaměření roviny ρ a přímky p jsou lineárně nezávislé, tedy rovina a přímka jsou mimoběžné.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^3$ najděte příčku mimoběžek $p : (1,2,-1) + s(1,-1,1)$, $q : (0,9,-2) + t(1,0,0)$ rovnoběžnou s vektorem $(1,2,0)$.

Řešení: Protože vektory $(1,-1,1), (1,0,0), (1,2,0)$ jsou lineárně nezávislé, taková přímka existuje. Stačí nalézt průsečík přímky q s rovinou $\rho : (1,2,-1) + s(1,-1,1) + r(1,2,0)$. Abychom tento průsečík nalezli, musíne řešit rovnici

$$(0,9,-2) + t(1,0,0) = (1,2,-1) + s(1,-1,1) + r(1,2,0)$$

přičemž nám stačí znát hodnotu parametru t. Rozepsáním do složek dostaneme nehomogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} t - s - r &= 1 \\ s - 2r &= -7 \\ -s &= 1 \end{aligned}$$

Odtud spočítáme $t = 3\,(s = -1, r = 3)$ a bod $(3,9,-2)$ je průsečíkem přímky q s rovinou ρ. Hledaná příčka je pak $(3,9,-2) + r(1,2,0)$.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^3$ najděte příčku mimoběžek $p : P + su = (3,3,3) + s(2,2,1)$ a $q : Q + tv = (0,5,-1) + t(1,1,1)$, která prochází bodem $A = (4,5,3)$.

Řešení: Snadno zjistíme, že jak vektory $(1,2,0), (2,2,1), (1,1,1)$ (kde $(1,2,0) = A - P$), tak vektory $(4,0,4), (2,2,1), (1,1,1)$ (kde $(4,0,4) = A - Q$) jsou lineárně nezávislé, takže příčka existuje. Potřebujeme najít průsečík přímky q s rovinou $\rho : (4,5,3) + r(1,2,0) + s(2,2,1)$. Pro hledaný průsečík tak dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} t - r - 2s &= 4 \\ t - 2r - 2s &= 0 \\ t - s &= 4 \end{aligned}$$

odkud $t = 0$. Průsečík přímky q s rovinou ρ je $R = (0,5,-1)$ a hledaná příčka je $(0,5,-1) + a(4,0,4) = (0,5,-1) + a(1,0,1)$.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^4$ uvažujme roviny $\rho : x_1 + x_2 = 3,\ x_3 + x_4 = 4$ a $\sigma : x_1 + x_3 = 1,\ x_2 - x_4 = 3$ a bod $M = (2,-2,3,-3)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná rovinu σ a je rovnoběžná s rovinou ρ.

Řešení: Nechť τ je rovina procházející bodem M a je rovnoběžná s rovinou ρ. Pak souřadnice bodu M splňují její rovnici, kterou získáme dosazením souřadnic bodu M do rovnice roviny ρ a dopočítáním příslušných koeficientů.

$$x_1 + x_2 = c$$
$$x_3 + x_4 = d$$

dosazením souřadnic bodu M dostáváme

$$2 - 2 = 0$$
$$3 - 3 = 0$$

tedy $c = d = 0$ a

$$\begin{aligned} \tau: \ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Bod P tvořící druhý bod přímky q je průsečíkem rovin σ a τ. Řešíme systém rovnic

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

jehož matici převedeme pomocí EŘO na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

ze kterého dostáváme $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -2$. Tedy $P = (-1, 1, 2, -2)$ a přímka q má rovnici

$$q : M + t(P - M) = (2, -2, 3, -3) + t(-3, 3, -1, 1)$$

Příklad: Najděte průnik afinních podprostorů $Q_1 : (3, 0, -3, 3) + a(1, 0, -1, 0) + b(0, 2, 0, 1)$, $Q_2 : (4, -2, -4, 2) + s(0, 0, 1, -1) + t(1, 2, 0, 0)$.

Řešení: Nechť $X \in Q_1 \cap Q_2$. Pak platí

$$X = A + au_1 + bu_2 = B + sv_1 + tv_2$$

tedy

$$au_1 + bu_2 - sv_1 - tv_2 = B - A$$

Soustavu přepíšeme do matice a upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odkud $a = p, b = p, s = p, t = -p$. Tedy

$$X = B - pv_1 + pv_2 = B + p(v_2 - v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pomocí vektorů u_1, u_2 dostaneme

$$X = A + pu_1 + pu_2 = A + p(u_1 + u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení:

1. Napište paramerické rovnice roviny, jestliže jsou zadány její
   (a) tři body $A = (-1, 1, 0),\ B = (2, 1, 6),\ C = (3, 0, 4)$,
   (b) dva body $= (1, 2, -3),\ B = (0, 2, 1)$ a směrový vektor $u = (2, 1, -1)$,
   (c) bod $A = (3, 1, -2)$ a dva lineárně nezávislé směrové vektory $u = (-1, 2, 1), v = (3, -4, 2)$.

2. Najděte obecnou rovnici roviny určené
   (a) třemi body $A = (1, -1, 1),\ B = (2, 1, -3),\ C = (1, 4, 2)$,
   (b) dvěma body $A = (4, 1, 2),\ B = (2, -2, 3)$ a směrovým vektorem $u = (3, -2, 1)$,
   (c) bodem $A = (3, 3, 3)$ a směrovými vektory $u = (1, -1, 1), v = (-1, 1, 1)$.

3. Zjistěte, které z bodů $A = (1, 2, -1),\ B = (1, 2, 2),\ C = (3, 1, 2),\ D = (-4, 2, 0)$ leží v rovině
   (a) $(x, y, z) = (6, 2, -2) + t(5, 0, -1) + s(1, 1, 0)$,
   (b) $x = 1 + 2t,\ x = 3 - 2t + s,\ z = 4 - 2t + 2s$,
   (c) $x + 17y + 5z - 30 = 0$.

4. Najděte parametrické vyjádření přímky v $\mathbf{R^3}$ zadané $p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)?

5. Najděte parametrické vyjádření podprostoru v $\mathbf{R}^4$ zadaného obecnými rovnicemi.

   (a) $x_1 + x_2 - 2x_4 = 6,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11,\ x_1 + x_2 - x_4 = 8,$

   (b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,\ x_2 + x_3 + x_4 = 5,\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11.$

6. Určete vzájemnou polohu přímek v prostoru $\mathbf{R}^2$, resp. $\mathbf{R}^3$; v případě, že jsou různoběžné, najděte jejich průsečík.

   (a) $p : 3x + 4y - 20 = 0, \quad q : x = 4 - 8t, y = 2 + 6t,$

   (b) $p : (x, y) = (2, -9) + t(1, -1), \quad q : (x, y) = (1, -1) + t(5, 2),$

   (c) $p : x = 3 - 6t, y = -1 + 4t, z = t, \quad q : x = -2 + 3t, y = 4, z = 3 - t,$

   (d) $p : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}, \quad q : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases},$

7. Určete vzájemnou polohu rovin v $\mathbf{R}^3$; v případě, že jsou různoběžné, napište paramerické rovnice jejich průsečíku.

   (a) $\rho : x + y + 2z - 3 = 0, \quad \sigma : x - y + z - 1 = 0,$

   (b) $\rho : (x, y, z) = (-1, 3, -2) + t(0, 1, 1) + s(1, -1, -2), \quad \sigma : x - y + z + 6 = 0.$

8. V prostoru $\mathbf{R}^3$, resp $\mathbf{R}^4$, zjistěte vzájemnou polohu přímky a roviny; v přídadě různoběžnosti určete jejich průsečík.

   (a) $p : x = 2 + 4t, y = -1 + t, z = 2 - t, \quad \sigma : 4x + y - z + 13 = 0,$

   (b) $p : \begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \sigma : 4x - 5y - z + 8 = 0,$

   (c) $p : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 0,$
   $\rho : (0, 3, 0, 1) + s(1, 0, -1, 0) + t(1, 2, -2, 0),$

   (d) $p : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 3,$
   $\rho : (1, -1, 1, 2) + s(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, -2, 2),$

   (e) $p : (4, -2, 3, -1) + t(1, -1, 1, -1), \quad \rho : x_1 + x_3 + x_4 = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3.$

9. V prostoru $\mathbf{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu

   (a) roviny $(1, 0, 2, 2) + r(1, -1, 0, 0) + s(1, 2, 0, -1)$
   a přímky $(0, 0, -6, 5) + t(1, 2, -3, 0),$

   (b) nadroviny $(2, 1, 1, 1) + r(1, 1, 1, 1) + s(1, 1, 1, -1) + t(1, 1, -1, -1)$
   a přímky $(3, 2, 0, -2) + u(1, 1, -1, 1),$

   (c) rovin $(2, 3, 1, 3) + s(-1, 1, 0, 2) + (0, 2, -3, 2),$
   $(-1, 0, 2, 1) + u(2, 4, -9, 2) + v(1, 1, 1, 1)$

10. V prostoru $\mathbf{R^4}$

   (a) určete parametry a, b tak, aby přímka $(1,2,1,2)+r(1,a,0,2)$ ležela v rovině $(1,1,2,b)+s(1,2,1,2)+t(1,1,2,2)$,

   (b) v závislosti na parametru a určete vzájemnou polohu rovin $(3,-1,-1,6)+s(-2,1,-2,1)+t(4,-1,-1,0)$, $\quad (4,1,3,a)+u(0,-2,0,1)+v(2,2,-1,-1)$.

11. V prostoru $\mathbf{R^5}$ určete vzájemnou polohu podprostorů:

   (a) $(1,1,1,1,1)+r(2,-8,3,-5,-9)$,
   $(1,1,2,-1,3)+s(1,-1,0,2,3)+t(0,2,-1,3,5)$,

   (b) $(-2,10,-1,2,-1)+r(2,-8,3,-5,1)$,
   $(1,1,2,-1,3)+s(1,-1,0,2,3)+t(0,2,-1,3,5)$.

12. V prostoru $\mathbf{R^3}$ najděte příčku mimoběžek

   (a) $(x,y,z)=(1,-1,2)+t(1,-1,3)$, $\quad (x,y,z)=(3,-1,1)+t(2,1,4)$, která prochází bodem $M=(3,-2,13)$.

   (b) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $\quad (x,y,z)=(2,0,1)+t(1,-1,1)$ rovnoběžnou s přímkou $x-y+z+11=0$, $x-3y-z-6=0$.

   (c) $x-2=\frac{y+3}{2}=\frac{-z-1}{2}$, $\quad x-3=y=\frac{z+58}{3}$, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin $2x-z-15=0$, $\quad x-y+324=0$.

   (d) $(1,3,4)+t(1,0,2)$ a $2x-z+2=0$, $y-3=0$, která prochází bodem $(13,17,29)$.

13. V prostoru $\mathbf{R^3}$ napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A=(3,-2,-4)$ rovnoběžně s rovinou $\rho: 3x-2y-3z-7=0$ a protíná přímku $p: 2x+3y+8=0,\ y+z+3=0$.

14. V prostoru $\mathbf{R^3}$ určete přímku q, která prochází bodem $M=(3,2,1)$, protíná přímku $p: x_1-x_2=1,\ x_1+x_3=6$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho: 2x_1+x_2+x_3=5$.

15. V prostoru $\mathbf{R^4}$ určete přímku q, která

   (a) prochází bodem $M=(8,9,-11,-15)$ a protíná přímky $p: (1,0,-2,1)+s(1,2,-1,-5)$, $r: (0,1,1,-1)+t(2,3,-2,-4)$,

   (b) prochází bodem $M=(1,2,-1,-2)$, protíná rovinu $\sigma: x_1+x_2=1,\ x_3-x_4=3$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho: x_1+x_3=-5,\ x_2+x_4=3$,

   (c) prochází bodem $M=(1,0,3,1)$, protíná přímku $p: (7,0,0,0)+t(0,1,0,1)$ a je rovnoběžná s nadrovinou $\rho: x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

16. V prostoru $\mathbf{R^5}$ určete přímku q, která prochází bodem $M=(5,3,4,6,2)$ a protíná roviny $\rho: (3,1,0,4,0)+a(0,1,0,0,0)+b(0,0,1,0,1)$ a $\pi: (0,1,-2,1,0)+c(1,0,0,0,0)+d(0,0,0,1,0)$.

17. Najděte příčku mimoběžek $p: (1,5,2,-1)+t(1,2,1,0)$, $q: (0,-1,1,1)+t(3,1,0,1)$ procházející bodem $M=(0,1,-5,-3)$.

18. Najděte parametrickou a implicitní rovnici nadroviny σ v $\mathbf{R^4}$ určenou body $B_1 = (-1, 0, -1, 0), B_2 = (0, 2, 0, 1), B_3 = (0, -2, 2, 0), B_4 = (1, 0, 0, -1)$. Určete její zaměření.

19. V $\mathbf{R^4}$ najděte obecné rovnice afinního podprostoru

    (a) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0) + s(1, -1, 1, 0) + t(3, -2, 0, 1)$,

    (b) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 1, 3) + s(1, 1, -2, -2) + t(1, 5, -4, 0)$.

20. Najděte průnik afinních podprostorů

    (a) $P_1 : (2, 3, 1, 3) + a(-1, 1, 0, 2) + b(0, 2, -3, 2)$,
    $P_2 : (-1, 0, 2, 1) + s(2, 4, -9, 2) + t(1, 1, 1, 1)$,

    (b) $P_1 : (-9, 2, 1, -5) + a(5, -1, 0, 2) + b(3, 1, 2, 0)$,
    $P_2 : (1, 2, 3, 4) + r(1, 0, 0, 0) + s(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 0)$.

21. V $\mathbf{R^2}$ je dán trojúhelník ABC. Označme po řadě A', B', C' středy jeho stran BC, AC, AB. Dokažte, že platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $(w)_\beta = (-\frac{7}{2}, \frac{23}{2}, 6)^T$. **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. **13.** (a) $f(x) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2)$; (b) $f(x) = (4x_1 + 2x_2 + 12x_3, -3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$. **14.** $f(x) = (3, -12), f(y) = (-3, -21)$. **15.** $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^5}, g : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^3}$; zobrazení $f \circ g : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^5}$ je dáno maticí AB, nejedná se o isomorfismus, zobrazení $g \circ f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ je dáno maticí BA, jedná se o isomorfismus.

10. AFINNÍ GEOMETRIE

1. (a) $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 0, 2) + s(4, -1, 4)$; (b) $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(-1, 0, 4) + s(2, 1, -1)$; (c) $(x, y, z) = (3, 1, -2) + t(-1, 2, 1) + s(3, -4, 2)$. **2.** (a) $22x - y + 5z - 28 = 0$; (b) $x - 5y - a3z + 27 = 0$; (c) $x + y - 6 = 0$. **3.** (a) A, D; (b) B, C; (c) A, C, D. **4.** $p : (x, y, z) = (3, -3, 0) + t(0, 1, 1)$, svazek rovin: $a(2x - y + z - 9) + b(x + y - z) = 0, (a, b) \neq (0, 0)$. **5.** (a) $(7, 3, 0, 2) + t(1, -1, 1, 0)$; (b) $(3, 2, 3, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$. **6.** (a) totožné; (b) různoběžné, $R = (-4, -3)$; (c) mimoběžné; (d) různoběžné, $R = (-3, 0, 4)$. **7.** (a) $x = 2 + 3t, y = 1 + t, z = -2t$; (b) totožné. **8.** (a) $(-2, -2, 3)$; (b) přímka leží v rovině; (c) mimoběžné; (d) přímka leží v rovině; (e) různoběžné, $P = (2, 0, 1, 1)$. **9.** (a) protínají se v bodě $(-\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, 2, 5)$; (b) přímka leží v nadrovině; (c) protínají se v přímce $(1, 2, 3, 4) + t(2, 4, -9, 2)$. **10.** (a) $a = 3, b = 2$; (b) pro $a = \frac{11}{4}$ se protínají v přímce $(4, -\frac{21}{10}, 3, \frac{43}{10}) + t(10, -2, -5, 1)$, pro $a \neq \frac{11}{4}$ mimoběžné. **11.** (a) rovnoběžné; (b) protínají se v bodě $(0, 2, 2, -3, 0)$. **12.** (a) $x = 3 + t, y = -2, z = 13 + 8t$; (b) $x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 3 - t$; (c) $x - 4 = y - 1 = \frac{z+5}{2}$; (d) příčka neexistuje, přímky jsou totožné. **13.** $x = 3 + 5t, y = -2 + 10t, z = -4 + 9t$. **14.** $q : (3, 2, 1) + t(-1, -1, 3)$. **15.** (a) $(8, 9, -11, -15) + t(6, 7, -8, -11)$; (b) $q : (1, 2, -1, -2) + t(-2, 0, 2, 0)$; (c) $q : (1, 0, 3, 1) + s(6, -1, -3, -2)$. **16.** $q : (5, 3, 4, 6, 2) + t(2, 1, 3, 2, 1)$. **17.** příčka neexistuje. **18.** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, -1, 0) + r(1, 2, 1, 1) + s(1, -2, 3, 0) + t(2, 0, 1, -1), -10x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 12x_4 = 2$. **19.** (a) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, -x_1 - x_2 + x_4 = -1$; (b) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, 4x_1 + x_3 + x_4 = 4$. **20.** (a) $X = (-1, 0, 2, 1)^T + p(2, 4, -9, 2)^T = (2, 3, 1, 3)^T + p(2, 4, -9, 2)^T$; (b) $X = (-9, 2, 1, -5)^T + p(3, 1, 2, 0)^T = (1, 2, 3, 4)^T + p(3, 1, 2, 0)^T$.