2. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Teorie

2.1. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad polem K. *Bilineární forma* na V je zobrazení $f : V \times V \to K$ takové, že pro všechna $a, b, c, d \in K$ a $u, v, w \in V$ platí:

$$f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$$

$$f(u, cv + dw) = cf(u, v) + df(u, w)$$

.

2.2. Definice. Nechť $f : V \times V \to K$ je bilineární forma a $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je báze prostoru V. Pak tato báze určuje *matici bilineární formy* $A = (a_{ij}) = (f(v_i, v_j))$.

2.3. Věta. *Nechť f je bilineární forma na V s maticí A v bázi α. Nechť souřadnice vektorů $u, v \in V$ v této bázi jsou $x, y \in K^n$. Pak pro libovolné vektory platí $f(u, v) = x^T \cdot A \cdot y$.*

2.4. Věta. *Je-li A matice bilineární formy v bázi α, pak matice bilineární formy v bázi β je $B = (id)^T_{\alpha,\beta} \cdot A \cdot (id)_{\alpha,\beta}$, kde $(id)_{\alpha,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi α .*

2.5. Definice. Dvě čtvercové matice $A, B \in Mat_n(K)$ se nazývají *kongruentní*, jestliže existuje regulární matice $P \in Mat_n(K)$ taková, že $B = P^T \cdot A \cdot P$.

2.6. Definice. Bilineární forma se nazývá *symetrická*, jestliže $f(u, v) = f(v, u)$, resp. *antisymetrická*, jestliže $f(u, v) = -f(v, u)$.

2.7. Věta. *Nechť f je bilineární forma a A její matice v nějaké bázi α. Pak f je symetrická, je-li matice A symetrická, a f je antisymetrická, je-li matice A antisymetrická.*

2.8. Věta. *Každá bilineární forma je součtem symetrické a antisymetrické bilineární formy, přičemž pro matici platí $A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$, kde první sčítanec odpovídá symetrické části a druhý antisymetrické části.*

2.9. Věta. *Každá symetrická matice $A \in Mat_n(K)$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí.*

2.10. Algoritmus. *Diagonalizace symetrických matic.*
Hledáme regulární matici P tak, aby matice $P^T \cdot A \cdot P$ byla diagonální.

Předpokládejme, že $a_{11} \neq 0$, pak na A provádíme elementární řádkové úpravy (označíme EŘO) tak, aby $a_{i1} = 0$ pro $i = 2, \ldots, n$. Současně provádíme stejné sloupcové úpravy (označíme ESO)a tím dosáhneme u symetrické matice toho, že výsledná matice má $a_{1j} = 0$ pro $j = 2, \ldots, n$. Provedení sloupcové úpravy na matici A odpovídá vynásobení této matice zprava maticí P_1, která vznikne z matice jednotkové provedením stejné sloupcové úpravy.

Analogicky řádkové úpravě odpovídá vynásobení matice A zleva maticí P_1^T. Provedením stejné řádkové i sloupcové úpravy na matici A dostáváme matici $P_1^T \cdot A \cdot P_1$, která je kongruentní s maticí A. Stejný postup uplatňujeme na další řádky a sloupce.
Je-li $a_{11} = 0$ a nějaké $a_{ii} \neq 0$ provedeme výměnu řádku 1 a i a sloupce 1 a i.
Je-li $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$ a existuje $a_{ij} \neq 0$ přičteme k řádku i řádek j a k sloupci i sloupec j.
Po všech těchto úpravách dostaneme diagonální matici

$$P_k^T \dots P_2^T \cdot P_1^T \cdot A \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_k = (P_1 \cdot P_2 \dots P_k)^T \cdot A \cdot (P_1 \cdot P_2 \dots P_k) = P^T \cdot A \cdot P,$$

která je diagonální s původní maticí A.

Ve výpočtech postupujeme tak, že si napíšeme blokovou matici, jejíž levý blok je tvořen maticí A a pravý blok jednotkovou maticí E. Pak v levém bloku provádíme EŘO a odpovídající ESO dokud nedostaneme diagonální matici. Zároveň provádíme v pravém bloku stejné úpravy jako v levém, ale pouze řádkové. Pak dostáváme v pravém bloku matici P^T.

$$(A \,|\, E) \to \left(P^T \cdot A \cdot P \,|\, P^T \cdot E\right)$$

2.11. Definice. Zobrazení $F : V \to K$ se nazývá *kvadratická forma*, jestliže existuje bilineární forma $f : V \times V \to K$ taková, že pro všechna $u \in V$ platí $F(u) = f(u, u)$.

2.12. Věta. *Nechť F je kvadratická forma na vektorovém prostoru V. Pak existuje právě jedna symetrická bilineární forma, která ji určuje.*

2.13. Definice. *Maticí kvadratické formy F* nazveme matici symetrické bilineární formy, která tuto kvadratickou formu určuje.

2.14. Věta. *(Sylvestrův zákon setrvačnosti) Každou kvadratickou formu F na reálném vektorovém prostoru R^n lze vyjádřit ve vhodné bázi (tuto bázi budeme dále nazývat kanonická báze) ve tvaru*

$$F(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 0x_{r+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

přičemž počet čísel +1, -1, 0 je nezávislý na volbě báze.

2.15. Definice. *Signatura* kvadratické formy F na reálném vektorovém prostoru R^n je trojice nezáporných čísel (s_+, s_-, s_0), kde s_+ je počet kladných, s_- počet záporných a s_0 počet nulových členů v diagonálním tvaru kvadratické formy.

2.16. Definice. Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru R^n. Řekneme, že F je

1. *pozitivně definitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) > 0$
2. *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) \geq 0$
3. *negativně definitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) < 0$
4. *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) \leq 0$
5. *indefinitní*, jestliže existují vektory z, $y \in R^n$ takové, že $F(y) > 0$ a $F(z) < 0$.

2.17. Věta. *Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru R^n. Pak*

1. *F je pozitivně definitní, právě tehdy když $s_+ = n$;*
2. *F je pozitivně semidefinitní, právě tehdy když $s_- = 0$;*
3. *F je negativně definitní, právě tehdy když $s_- = n$;*
4. *F je negativně semidefinitní, právě tehdy když $s_+ = 0$;*

2.18. Věta. *Kvadratická forma je pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory její matice jsou kladné.*
Kvadratická forma je negativně definitní, právě když pro hlavní minory její matice platí $(-1)^i \det(A_i) > 0$.

2.19. Definice. *Kvadrikou* nazveme množinu

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n, \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + \sum_i bx_i + c = 0\right\}.$$

Řešené příklady

Úloha 1: Kvadratickou formu

$$F(x) = x_1x_2 + x_2x_3$$

zadanou ve standardních souřadnicích převeďte pomocí ESO a EŘO na diagonální tvar.

Řešení: Napíšeme si vpravo jednotkovou matici a vlevo matici dané kvadratické formy. Na matici A kvadratické formy provádíme řádkové a tytéž sloupcové úpravy, dokud nedostaneme diagonální tvar matice, na jednotkové matici přitom provádíme tytéž úpravy, ale vždy jen řádkové (viz. poznámka 2.10.).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nejdříve druhý řádek přičteme k prvnímu, protože $a_{11} = 0$, tutéž úpravu provedeme také na pravé matici, pak provedeme stejnou operaci se sloupci, ale to už pouze na levé matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tak jsme dostali na pravé straně opět symetrickou matici, ale $a_{11} \neq 0$, dále vynulujeme pomocí prvku a_{11} zbylé prvky prvního řádku a sloupce tak, že přičteme $-\frac{1}{2}$ násobek prvního řádku nejprve k druhému a pak ke třetímu řádku, a pak provedeme odpovídající sloupcovou úpravu, ale pouze na levé matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Dále přičteme druhý řádek k třetímu a provedeme odpovídající sloupcovou úpravu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dostáváme tedy diagonální tvar kvadratické formy $F(y) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.
Levá matice je $(id)^T_{\alpha,\beta}$ a její řádky nám udávají bázi, ve které má daná kvadratická forma tento tvar:

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Úloha 2: Najděte diagonální tvar kvadratické formy

$$F(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

zadané ve standardních souřadnicích v R^3 pomocí algoritmu doplnění na čtverce.

Řešení: Všechny smíšené členy obsahující x_1 připojíme k členu x_1^2 a doplníme na čtverec. Pak všechny smíšené členy obsahující x_2 připojíme k členu x_2^2 a opět doplníme na čtverec.

$$F(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 10x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 12x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 6x_3)^2 + 36x_3^2$$

nyní můžeme zavést nové souřadnice:

$$\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & x_1 & -x_2 & +x_3 \\ y_2 & = & & x_2 & -6x_3 \\ y_3 & = & & & x_3 \end{array}$$

diagonální tvar je:

$$F(y) = y_1^2 - y_2^2 + 36y_3^2$$

$$\mathrm{id}_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledáme matici inverzní k této matici přechodu a dostáváme

$$\mathrm{id}_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupce této matice udávají vektory báze, ve které má matice diagonální tvar.

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Úloha 3: Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\,.$$

Řešení: Použijeme metodu doplnění na čtverce; nejprve bereme v úvahu pouze kvadratické členy

$$(x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + x_2^2 + 2x_1 + 1 = 0$$

transformujeme souřadnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= x_2\,. \end{aligned}$$

Odtud spočítáme $x_1 = y_1 - 2y_2$, po transformaci dostáváme

$$y_1^2 - 3y_2^2 + 2y_1 - 4y_2 + 1 = 0$$

a nyní opět doplňujeme na čtverce

$$(y_1 + 1)^2 - 3\left(y_2^2 + \frac{4}{3}y_2\right) = 0$$

$$(y_1 + 1)^2 - 3\left(y_2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{3}{4}(y_1 + 1) - \frac{9}{4}\left(y_2 + \frac{2}{3}\right) + 1 = 0$$

po další transformaci souřadnic dostáváme:

$$\begin{array}{rcccl} z_1 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1+1) & = & \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+2x_2+1) \\ z_2 & = & \frac{3}{2}(y_2+\frac{2}{3}) & = & \frac{3}{2}(x_2+\frac{2}{3}) \end{array}$$

$$k : z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Jedná se tedy o hyperbolu, jejíž střed S je dán $z_1 = 0$ a $z_2 = 0$, v původních souřadnicích

$$x_2 = -\frac{2}{3}\,,$$

$$x_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}\,.$$

Tedy $S = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$. Nyní ještě najdeme bázi pro nové souřadnice. Víme

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice k této matici je

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a její sloupce nám určují vektory báze $\alpha : [v_1, v_2]$, kde $v_1 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ a $v_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pro souřadnice libovolného bodu tedy platí

$$x = S + (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot z\,.$$

Úloha 4: Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 5 na vektorovém prostoru R^5 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(1,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0,0,-1,0,0)$, $(0,0,1,0,1)$.

Řešení: Podle Sylvestrova zákona setrvačnosti (věta 2.14.) má kvadratická forma F vzhledem ke kanonické bázi tvar

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2\,,$$

kde a_i, $i = 1\ldots5$ nabývají hodnot $+1$, -1, 0. Přičemž kvadratická forma je pozitivně definitní na nějakém podprostoru, pokud pro všechny vektory x z tohoto podprostoru platí $F(x) > 0$.

Jde vidět, že podprostor generovaný vektory $(1,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0)$ je vlastně podprostor vektorů tvaru $(a,b,0,c,0); a,b,c \in R$. A tedy

$$F(a,b,0,c,0) > 0\,.$$

Z toho plyne $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a $a_4 = 1$.

Analogicky podprostor generovaný vektory $(0,0,-1,0,0)$, $(0,0,1,0,1)$ je podprostor vektorů tvaru $(0,0,e,0,f); e,f \in R$. Má-li být na tomto podprostoru kvadratická forma negativně definitní, musí platit

$$F(0,0,e,0,f) < 0$$

Z toho plyne $a_3 = -1$, $a_5 = -1$.

Kvadratická forma má tedy tvar

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0\,.$$

Cvičení

1. Nechť je na R^4 dána bilineární forma f souřadnicovým vyjádřením vzhledem ke standardní bázi

   $$f(x,y) = -x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_4 - x_3y_4 + x_4y_3\,.$$

   Určete matici v bázi ϵ a hodnost formy.

2. Pro bilineární formu zadanou ve standardní bázi $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_1y_2$ na R^2 určete její souřadnicové vyjádření a matici v nové bázi $v_1 = (3,-1)^T$, $v_2 = (1,-1)^T$.

3. Ve standardní bázi na R^3 je dána bilineární forma

   $$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3$$

   Určete matici bilineární formy v bázi $v_1 = (1,0,1)^T$, $v_2 = (0,1,1)^T$, $v_3 = (1,1,0)^T$.

4. Pro bilineární formu z příkladu 1 určete symetrickou a antisymetrickou bilineární formu f_S a f_A, pro které platí $f = f_S + f_A$.

5. Pro bilineární formu na R^3 určete symetrickou a antisymetrickou bilineární formu f_S a f_A, pro které platí $f = f_S + f_A$.

   (a) $f(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$

   (b) $f(x,y) = 2x_1y_2 + 4x_2y_3 + 6x_3y_1$

6. Najděte nějakou bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru R^3, ve které má tato forma diagonální tvar. Analytické vyjádření f vzhledem ke standardní bázi je

   $$f(x,y) = 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_3y_3$$

7. Najděte nějakou bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru R^3, ve které má tato forma diagonální tvar. Analytické vyjádření f vzhledem ke standardní bázi je
$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

8. Najděte symetrickou bilineární formu, která určuje kvadratickou formu F. F má ve standardní bázi v R^3 rovnici

   (a) $F(x) = 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

   (b) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$

9. Najděte diagonální tvar kvadratické formy F na R^3 a bázi, ve které má forma tento tvar, je-li souřadnicové vyjádření ve standardní bázi
$$F(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3\,.$$

10. Najděte diagonální tvar kvadratické formy na R^3 pomocí algoritmu doplnění na čtverce a bázi, ve které má forma tento tvar, je-li souřadnicové vyjádření ve standardní bázi

    (a) $F(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

    (b) $F(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

11. Zjistěte vlastnosti reálných kvadratických forem, např. definitnost a signaturu, jestliže jejich souřadnicové vyjádření vzhledem ke standardní bázi je

    (a) $F(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, na R^2

    (b) $F(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$, na R^3

    (c) $F(x) = -2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$, na R^3

12. Najděte diagonální tvar kvadratické formy na R^3 a zjistěte, zda je pozitivně definitní
$$F(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_1x_3$$

13. Ve standardní bázi na R^3 je dána kvadratická forma. Určete její signaturu.

    (a) $F(x) = x_1x_3$

    (b) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

    (c) $F(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

14. V nějaké bázi na reálném vektorovém prostoru R^4 je dána kvadratická forma F. Určete její diagonální tvar, definitnost, signaturu.

    (a) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$

    (b) $F(x) = 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

(c) $F(x) = x_1x_3 + x_1x_4$

15. Uvažme bilineární formu zadanou ve standardní bázi

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 4x_3y_2 - x_3y_3$$

definivanou na C^3. Nechť $F(x)$ je jí definovaná kvadratická forma, napište analytické vyjádření F a najděte diagonální tvar F.

16. Najděte všechny hodnoty parametru a, pro které je kvadratická forma F na R^3 pozitivně definitní (použijte Sylvestrovo kritérium).

(a) $F(x) = x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$

(b) $F(x) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

17. Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : 5x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_1x_2 - 6x_2 + 4 = 0$$

a převeďte na diagonální tvar.

18. Zjistěte jakou kuželosečku popisují rovnice, převeďte na diagonální tvar, případně určete její střed

(a) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + 3x_2 - 2 = 0$

(b) $k : 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_1x_2 + x_1 + 10x_2 - 3 = 0$

(c) $k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0$

(d) $k : 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 4 = 0$

(e) $k : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0$

(f) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0$

(g) $k : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0$

(h) $k : 4x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 3 = 0$

(i) $k : x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 8x_2 - 9 = 0$

(j) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

19. Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 6 na vektorovém prostoru R^7 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0, 1, 0, -1, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

20. Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 6 na vektorovém prostoru R^7 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(-1,0,0,0,0,0,0)$, $(-1,0,1,0,0,0,0)$, $(-1,0,1,0,1,0,0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0,1,0,0,0,0,0)$, $(0,-1,0,0,0,0,1)$, $(0,1,0,0,0,1,0)$.

21. Nechť $Mat_2(R)$ je vektorový prostor všech matic řádu 2 a nechť $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_2(R)$. Dokažte, že zobrazení $f : Mat_2(R) \times Mat_2(R) \to R$ definované předpisem $f(A,B) = tr(A \cdot M \cdot B)$, pro $\forall A, B \in Mat_2(R)$ (tr znamená stopu matice, tj. součet prvků na hlavní diagonále) je bilineární forma. Pak najděte matici této bilineární formy v bázi α.

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$