5. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY, ORTOGONÁLNÍ MATICE

Teorie

5.1. Definice. *Lineární operátor* je lineární zobrazení $\phi : V \to V$, kde V je vektorový prostor.

5.2. Definice. Nechť $\phi : V \to V$ je lineární operátor, $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak *matice operátoru ϕ v bázi α* je matice $(\phi)_{\alpha,\alpha} = (a_{ij})$, kde ve sloupci j jsou souřadnice vektoru $\phi(v_j)$ v bázi α.

5.3. Věta. *Nechť $\phi : V \to V$ je lineární operátor, $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\beta = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V. Pak pro matice zobrazení ϕ v bázích α a β platí tento vztah:*

$$(\phi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (\phi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\beta},$$

kde $(id)_{\alpha,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi α.

5.4. Definice. Řekneme, že matice A a B jsou *podobné*, existuje-li regulární matice P taková, že $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

5.5. Definice. Nechť V je vektorový prostor a $\phi : V \to V$ je lineární operátor. Podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní podprostor operátoru ϕ*, jestliže $\phi(U) \subseteq U$.

5.6. Definice. Vektor $u \neq o, u \in V$, kde V je vektorový prostor, se nazývá *vlastní vektor* lineárního operátoru ϕ, existuje-li číslo $\lambda \in K$ takové, že

$$\phi(u) = \lambda u$$

Číslo λ se pak nazývá *vlastní číslo.*

5.7. Poznámka. Je-li matice lineárního zobrazení A, pak vlastní vektory x jsou nenulová řešení rovnic

$$Ax = \lambda x.$$

Tato soustava je ekvivalentní se soustavou

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

což je homogenní soustava rovnic, která má nenulové řešení právě tehdy když

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

.

5.8. Definice. Rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ se nazývá *charakteristická rovnice matice A.*

5.9. Věta. *Vlastní čísla jsou právě kořeny charakteristické rovnice. Je-li číslo λ_0 vlastní číslo, pak vlastní vektory jsou řešením soustavy rovnic $(A - \lambda_0 E) = 0$.*

5.10. Definice. *Algebraická násobnost vlastního čísla* je násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristické rovnice. *Geometrická násobnost vlastního čísla* je dimenze podprostoru $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$.

5.11. Věta. *Je-li $\lambda = a+bi$ vlastní číslo reálné matice A s vlastním vektorem $u = u_1+iu_2$, kde $u_1, u_2 \in R^n$, pak $\overline{\lambda} = a - bi$ je taky vlastní číslo s vlastním vektorem $\overline{u} = u_1 - iu_2$.*

5.12. Poznámka. Podprostor generovaný vektory u_1, u_2 v R^n z předchozí věty je invariantní podprostor zobrazení ϕ. Platí, že

$$A \cdot (u_1 + iu_2) = (a + ib)(u_1 + iu_2)\,.$$

Rozepsáním na reálnou a imaginární část rovnice dostáváme

$$\begin{array}{rcll} A \cdot u_1 & = & au_1 & -bu_2 \\ A \cdot u_2 & = & bu_1 & +au_2 \end{array}\,.$$

Zobrazení ϕ má tedy v bázi $[u_1, u_2]$ matici

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Číslo $a+ib$ můžeme napsat v goniometrickém tvaru $a+ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, pak má matice zobrazení tvar

$$\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Tento operátor působí jako otočení o úhel α složené se stejnolehlostí na dvourozměrném invariantním podprostoru zobrazení ϕ.

5.13. Věta. *Nechť ϕ je lineární zobrazení a nechť $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je báze tvořená vlastními vektory příslušnými vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Pak matice lineárního zobrazení v této bázi má tvar*

$$(\phi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.14. Věta. *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

5.15. Definice. Nechť U a V jsou dva euklidovské vektorové prostory. Zobrazení $\phi : U \to V$ se nazývá *ortogonální*, právě když $\langle\phi(u_1), \phi(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$ pro $\forall u_1, u_2 \in U$.

5.16. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je lineární operátor. Pak ϕ je ortogonální zobrazení, právě tehdy když pro matici zobrazení v ortonormální bázi α platí, že $A^{-1} = A^T$.*

5.17. Definice. Matici A, pro kterou platí $A^{-1} = A^T$, nazýváme *ortogonální maticí.*

5.18. Definice. Nechť U a V jsou dva unitární vektorové prostory. Zobrazení $\phi : U \to V$ se nazývá *unitární* právě když $\langle \phi(u_1), \phi(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ pro $\forall u_1, u_2 \in U$.

5.19. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je lineární operátor. Pak ϕ je unitární zobrazení, právě tehdy když pro matici zobrazení v ortonormální bázi α platí, že $A^{-1} = \overline{A}^T$.*

5.20. Definice. Matici A, pro kterou platí $A^{-1} = \overline{A}^T$, nazýváme *unitární maticí.*

5.21. Věta. *Je-li matice A unitární, pak $|\det A| = 1$ a její vlastní čísla mají absolutní hodnotu rovnu 1.*

5.22. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je unitární zobrazení. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory taková, že v této bázi má matice zobrazení diagonální tvar*

$$(\phi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.23. Poznámka. Každá ortogonální matice A je unitární. Má-li A reálná vlastní čísla, pak jsou to 1 nebo -1.
Má-li komplexní vlastní číslo $a+ib$, pak má také vlastní číslo $a-ib$, a protože $|a+ib| = 1$, tak $a^2 + b^2 = 1$. Je-li $u_1 + iu_2$ vlastní číslo, pak $u_1 - iu_2$ je také vlastní číslo. Z toho, že $(u_1 + iu_2) \perp (u_1 - iu_2)$ plyne, že $\|u_1\| = \|u_2\|$ a $u_1 \perp u_2$. u_1, u_2 tedy tvoří ortogonální bázi dvourozměrného invariantního podprostoru.

$$A(u_1 + iu_2) = (a+ib)(u_1 + iu_2)$$

Z toho plyne

$$Au_1 = au_1 - bu_2,\; Au_2 = bu_1 + au_2\,.$$

V bázi u_1, u_2 je tedy matice tohoto zobrazení (tuto bázi nazýváme kanonická báze)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení je tedy otočení o úhel α .
Z toho plyne, že každá ortogonální matice řádu 3 reprezentuje geometricky otočení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k této ose procházející počátkem.

Řešené příklady

Úloha 1: Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru zadaného maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi.

Řešení: Podle věty 5.9. jsou vlastní čísla řešením charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$. Spočteme tedy tento determinant, položíme ho roven nule a řešíme charakteristickou rovnici.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

z toho plyne

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 + (1-\lambda) + (1-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Jako řešení charakteristické rovnice dostáváme dvě vlastní čísla, $\lambda_1 = 1$ s algebraickou násobností 1, $\lambda_2 = 2$ s algebraickou násobností 2. Podle věty 5.9. jsou vlastní vektory řešením homogenní soustavy rovnic $(A - \lambda E) = 0$.

Pro $\lambda_1 = 1$ má homogenní soustava tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametr t, $x_3 = t$, pak $x_2 = t$, $x_1 = t$.
Řešením je podprostor generovaný vektorem $(1,1,1)^T$, tedy podprostor vlastních vektorů

$$[(1,1,1)^T].$$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_1 je 1.

Pro $\lambda_2 = 2$ má homogenní soustava tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametry t a s, $x_3 = t$, $x_2 = s$, pak $x_1 = t - s$.
Řešením je podprostor generovaný vektory $(1,0,1)^T$, $(-1,1,0)^T$, tedy podprostor vlastních vektorů

$$[(1,0,1)^T, (-1,1,0)^T].$$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_2 je 2 .

Všimněte si, že v bázi $\alpha : \left[(1,1,1)^T, (1,0,1)^T, (-1,1,0)^T\right]$ je matice daného lineárního zobrazení diagonální

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2: Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

zjistěte, jaké geometrické zobrazení euklidovského prostoru R^3 popisuje lineární operátor daný touto maticí. Určete matici operátoru ve vhodné ortogonální bázi.

Řešení: Lehce ověříme, že $A \cdot A^T = E$ a tedy matice A je ortogonální.
Nejprve hledáme vlastní čísla, to znamená, že najdeme charakteristický polynom.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\frac{1}{2} - \lambda)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - \lambda) + \frac{1}{4}\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

Řešením charakteristické rovnice jsou vlastní čísla

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = i \qquad \lambda_3 = -i.$$

Dále hledáme vlastní vektory, tj. řešíme vždy homogenní soustavu rovnic $(A - \lambda E) = 0$.

Pro λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením této soustavy je podprostor vlastních vektorů $[(1,1,0)^T]$.

Pro $\lambda_2 = i$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - i & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 - i & 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - \sqrt{2}i & -i - 1 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením této soustavy je podprostor vlastních vektorů $[(-1, 1, \sqrt{2}i)^T]$.
Podle věty 5.11. je podprostor vlastních vektorů pro λ_3 roven $[(-1, 1, -\sqrt{2}i)^T]$.

Podle poznámky 5.21. zvolíme novou reálnou ortonormální bázi

$$\alpha = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T, (0, 0, 1)^T \right]$$

Protože $\lambda_2 = i$, tak $\cos\alpha = 0$ a $\sin\alpha = 1$ z toho plyne, že se jedná o otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem osy dané směrem $(1, 1, 0)^T$, musíme ale ještě určit orientaci otočení. Z matice zobrazení je vidět, že druhý vektor báze se zobrazí na třetí vektor báze a třetí vektor báze se zobrazí na vektor opačný k druhému vektoru báze. Otočení je tedy ve směru od druhého ke třetímu vektoru báze.
Tvar matice operátoru v nové bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3: Ve standardních souřadnicích napište matici zobrazení, které je otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem přímky $x = 0$, $y - z = 0$.

Řešení: Nejprve určíme matici v jisté ortonormální bázi β, ve které má matice tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zobrazení je otočení kolem přímky $x = 0$, $y - z = 0$, první vektor báze β tedy bude jednotkový směrový vektor této přímky $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$. Pak β doplníme na ortonormální bázi:

$$\beta : \left[\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T, (1, 0, 0)^T \right]$$

$$(\phi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice zobrazení ve standardní bázi pak je

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} \cdot (\phi)_{\beta,\beta} \cdot (\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} \cdot (\phi)_{\beta,\beta} \cdot (\mathrm{id})^T_{\epsilon,\beta} \,,$$

kde $(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi ϵ.

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Z toho plyne

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru daného maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. V R^3 určete podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Zjistěte, zda je daná matice podobná diagonální matici nad poli Q, R, C. (To nastane právě tehdy, když vlastní vektory generují celý prostor.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice lineárního operátoru. U vlastního čísla určete jeho algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice podobná nějaké diagonální matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Zjistěte, jak závisí vlastní hodnoty a vlastní vektory matice na parametrech a, b.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ a & b & 2+a \end{pmatrix}$$

7. Zjistěte, jak vypadají a jaká geometrická zobrazení určují všechny ortogonální matice řádu 2.

8. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů najděte matici lineárního operátoru ve vhodné bázi, pomocí které určíte, o jakou geometrickou transformaci se jedná, je-li operátor zadán ve standardní bázi maticí:

$$A = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů zjistěte o jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru R^3 se jedná.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

10. Najděte ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory a matici v této bázi unitárního operátoru daného maticí ve standardní bázi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

11. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je otočením o úhel π kolem přímky $x - z = 0$, $y = 0$.

12. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem přímky $x + y = 0$, $z = 0$, přičemž $f(-1, 1, 1) = (a, b, 0)$, kde $a + b > 0$.

13. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je symetrií podle roviny $\sqrt{3}y - x = 0$.

14. Lineární zobrazení v R^3 je otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 0)^T$ takové, že $f(1, -1, 0) = (0, 0, \sqrt{2})$. Najděte matici zobrazení ve standardní bázi.

15. V R^n napište matici symetrie podle roviny kolmé k vektoru v v ortonormální bázi $[v, v_2, \ldots, v_n]$.

16. Definujte na R^3 dva skalární součiny $\langle\,,\,\rangle_1$ a $\langle\,,\,\rangle_2$ tak, aby zobrazení $\phi : (R^3, \langle\,,\,\rangle_1) \to (R^3, \langle\,,\,\rangle_2)$, $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_3)$, bylo ortogonální.