6. SYMETRICKÉ MATICE A METRICKÁ KLASIFIKACE KUŽELOSEČEK

Teorie

6.1. Definice. Reálná matice A se nazývá *symetrická*, právě když $A = A^T$.

6.2. Věta. *Pro každou reálnou symetrickou matici A existuje ortogonální matice P tak, že $P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A \cdot P$ je diagonální.*

6.3. Věta. *Každá kvadratická forma f na euklidovském prostoru V má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar $f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.*

6.4. Věta. (*Metrická klasifikace kuželoseček*) *Nechť ve standardní bázi v R^2 je kuželosečka zadaná rovnicí $k(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0$. Pak existuje ortonormální afinní báze, které říkáme kanonická báze, v níž je tato kuželosečka dána jednou z rovnic:*

1. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 + 1 = 0$ — *prázdná množina*
2. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 = 0$ — *bod*
3. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0$ — *elipsa*
4. $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0$ — *hyperbola*
5. $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 = 0$ — *dvě různoběžky*
6. $(\frac{y_1}{a})^2 - 2py_2 = 0$ — *parabola*
7. $(\frac{y_1}{a})^2 - 1 = 0$ — *dvě rovnoběžky*
8. $(\frac{y_1}{a})^2 + 1 = 0$ — *prázdná množina*
9. $y_1^2 = 0$ — *přímka*

Řešené příklady

Úloha 1: Najděte ortonormální bázi, v níž má matice zobrazení $\phi(x) = A \cdot x$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonální tvar.

Řešení: Matice A je symetrická a podle věty 6.2. ji lze diagonalizovat tak, že na diagonále jsou vlastní čísla a báze, ve které má matice tento tvar, je tvořena vlastními vektory.
Nejprve tedy řešíme charakteristickou rovnici:

$$(\lambda-4)^3-16-12(\lambda-4)=0$$

vlastní čísla tedy jsou $\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$.
Dále hledáme vlastní vektory.

Pro $\lambda_1=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametry t a s, $x_3=t$, $x_2=s$, pak $x_1=-t-s$, nezávislou volbou parametrů dostáváme, že podprostor vlastních vektorů je generován vektory $(-1,1,0)^T$, $(-1,0,1)^T$, užitím Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu a normováním dostáváme ortonormální bázi tohoto podprostoru:

$$\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T\right]$$

Pro $\lambda_2=8$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Zavedeme parametr t , $x_3=t$, pak $x_2=t$, $x_1=t$, volbou parametru dostáváme, že podprostor vlastních vektorů je generován vektorem $(1,1,1)^T$, normováním dostáváme ortonormální bázi tohoto podprostoru:

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\right]$$

diagonální tvar matice je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a to v bázi $\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\right]$.

Úloha 2: Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\,,$$

popřípadě určete její střed, osy a načrtněte obrázek.

Řešení: Matice kvadratické formy je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a ta se dá podle věty 6.3. napsat v diagonálním tvaru s vlastními čísly na diagonále.
Hledáme tedy vlastní čísla a vlastní vektory, charakteristická rovnice má tvar

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0\,.$$

Vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory tedy jsou:
$\lambda_1 = -1$ příslušný normovaný vlastní vektor je $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$
$\lambda_2 = 3$ příslušný normovaný vlastní vektor je $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

Nyní přejdeme k bázi $\alpha = [u, v]$, ve které má matice kvadratické formy tvar $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Přitom matice přechodu od báze α ke standardní bázi ϵ má tvar $(\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
a souřadnice x_1, x_2 ve standardní bázi spočítáme ze souřadnic y_1, y_2 v bázi α takto:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \\ x_2 & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \end{array} \quad .$$

Převedeme rovnici kuželosečky do nových souřadnic y_1, y_2:

$$k(y) : -y_1^2 + 3y_2^2 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 1 = 0\,.$$

Nyní ještě posuneme střed soustavy souřadnic tak, aby ležel ve středu kuželosečky. Doplníme tedy na čtverce a zavedeme nové souřadnice.

$$k : -\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 3\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 1 = 0$$

$$\begin{array}{rcllcllll} z_1 & = & y_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 & = & y_2 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 & +\frac{\sqrt{2}}{6} \end{array}$$

$$k : z_1^2 - 3z_2^2 - \frac{4}{3} = 0$$

$$k : \left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)^2 - \left(\frac{z_2}{\frac{2}{3}}\right)^2 - 1 = 0$$

Jedná se tedy o hyperbolu, jejíž osy jsou přímky zadané parametricky $S + tu$ a $S + tv$. Střed má souřadnice $(z_1, z_2) = (0, 0)$, $(y_1, y_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6})$ a $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Cvičení

1. Najděte diagonální tvar symetrické matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Najděte diagonální tvar symetrické matice a bázi, ve které má matice tento tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Určete o jakou kuželosečku se jedná, případně určete její střed, osy a nakreslete obrázek.

   (a) $k : 4xy + 3y^2 + 6x + 12y - 36 = 0$

   (b) $k : x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0$

   (c) $k : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

4. Určete typ a kanonickou rovnici kuželosečky, případně nakreslete obrázek.

   (a) $k : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

   (b) $k : 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$

   (c) $k : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

   (d) $k : 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

(e) $k: 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

(f) $k: 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

(g) $k: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$

(h) $k: 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$

(i) $k: 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$

5. Určete typ kuželosečky a délky jejích poloos.

(a) $k: 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$

(b) $k: 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$

(c) $k: 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

(d) $k: 12x^2 + 26xy + 12y^2 - 52x - 48y + 73 = 0$

6. Ověřte, že daná kuželosečka je parabola a určete její parametr.

(a) $k: 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$

(b) $k: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$

(c) $k: x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$

(d) $k: 9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0$

7. Určete typ kuželosečky, případně délky jejích poloos a střed.

(a) $k: 3x^2 + 8xy - 3y^2 - 1 = 0$

(b) $k: 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$

(c) $k: \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 3 = 0$

(d) $k: xy + 3x - 2y - 6 = 0$

(e) $k: 6x^2 + 4xy + 6y^2 - 16 = 0$

(f) $k: 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

(g) $k: x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$

8. Najděte ortonormální bázi kvadratické formy $f(x, y, z) = 17x^2 + 4xy - 4xz + 14y^2 + 8yz + 14z^2$, ve které má forma diagonální tvar, na euklidovském prostoru R^3 se standardním skalárním součinem vzhledem ke standardní (rovněž ortonormální) bázi. Přitom jedno z vlastních čísel matice kvadratické formy je 18.

9. Najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f(x, y, z) = 3x^2 - 4xy$, ve které má forma diagonální tvar, na euklidovském prostoru R^3 se standartním skalárním součinem vzhledem ke standardní (rovněž ortonormální) bázi.