3. SKALÁRNÍ SOUČIN

Teorie

3.1. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad polem K. Pak *skalární součin* na V je bilineární symetrická forma, tj. zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to K$ takové, že $\langle x, x\rangle > 0$ pro $x \in V$, $x \neq o$. (To znamená, že příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.)
Reálný vektorový prostor se skalárním součinem nazýváme *euklidovský prostor*.

3.2. Definice. Nechť R^n je vektorový prostor. Definujeme skalární součin pro $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jako $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Takto definovaný skalární součin nazýváme *standardní skalární součin.*
Euklidovský vektorový prostor R^n se standardním skalárním součinem budeme značit E_n.

3.3. Definice. *Velikost (norma) vektoru* v v euklidovském prostoru V je číslo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

3.4. Věta. *(Cauchyova-Schwartzova nerovnost) Pro každé dva vektory v euklidovském prostoru V platí*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

.

3.5. Definice. Nechť V je euklidovský prostor, $u, v \in V$. *Úhel*, který vektory u a v svírají je číslo $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ takové, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

.

3.6. Definice. Dva vektory $u, v \in V$, kde V je euklidovský prostor, nazveme *kolmé (ortogonální)*, pokud $\langle u, v\rangle = 0$.
Dva vektory $u, v \in V$, nazveme *ortonormální*, pokud jsou ortogonální (tj. $\langle u, v\rangle = 0$) a pokud jejich velikost je rovna jedné (tj. $\|u\| = 1 \wedge \|v\| = 1$).

3.7. Věta. *Nechť V je euklidovský prostor a $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jsou po dvou ortogonální vektory různé od nulového. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

3.8. Definice. Bázi tvořenou ortogonálními vektory nazveme *ortogonální báze.* Bázi tvořenou ortonormálními vektory nazveme *ortonormální báze.*

3.9. Věta. *Nechť V je euklidovský prostor a $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ libovolné vektory. Pak existují ortogonální vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, které generují tentýž prostor jako vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$, to znamená*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = [v_1, v_2, \ldots, v_k]\,.$$

Algoritnus, s jehož pomocí lze nalézt vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ se nazývá Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces a je popsán v úloze 1.

3.10. Definice. Řekneme, že množiny $A, B \subseteq V$ jsou *ortogonální množiny (ozn. $A \perp B$)* jestliže

$$\forall u \in A, \forall v \in B : \langle u, v \rangle = 0$$

.

3.11. Definice. *Ortogonální doplňek množiny* A v euklidovském vektorovém prostoru V nazveme množinu

$$A^\perp = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in A\}$$

.

3.12. Definice. Nechť V je euklidovský prostor a $U \subseteq V$ je vektorový podprostor ve V. *Kolmá projekce vektoru $v \in V$ do U* je vektor $Pv \in U$ takový, že $v - Pv \perp U$.

3.13. Věta. Nechť V je euklidovský prostor a $U \subset V$ je podprostor. Potom $U \oplus U^\perp = V$.

Řešené příklady

Úloha 1: Použijte Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces na bázi $\alpha : u_1 = (2, 0, -1)^T$, $u_2 = (-1, 1, 1)^T$, $u_3 = (1, 1, 1)^T$ vektorového prostoru E_3.

Řešení: Budeme hledat ortogonální bázi $\beta : [v_1, v_2, v_3]$
1) Za v_1 zvolíme libovolně jeden ze tří vektorů původní báze α , např.

$$v_1 = u_1$$

a tedy

$$v_1 = (2, 0, -1)^T$$

2) Hledáme druhý vektor báze v_2 ve tvaru

$$v_2 = u_2 + p_1 v_1$$

tuto rovnost skalárně vynásobíme vektorem v_1

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, u_2 \rangle + p_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

požadujeme, aby vektory v_1, v_2 byly kolmé, proto skalární součin $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$; zbylé skalární součiny můžeme už lehce spočítat $\langle v_1, u_2 \rangle = -3$, $\langle v_1, v_1 \rangle = 5$, pak

$$0 = -3 + 5p_1 \quad \text{z toho plyne} \quad p_1 = \frac{3}{5}$$

a tedy

$$v_2 = (-1, 1, 1)^T + \frac{3}{5}(2, 0, -1)^T$$

$$v_2^0 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)^T$$

můžeme do báze zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, pro snadnější počítání tedy volme

$$v_2 = (1, 5, 2)^T$$

3) Nyní zbývá najít ještě třetí vektor báze v_3, který musí být kolmý k oběma předchozím vektorům v_1 a v_2; předpokládejme jej ve tvaru

$$v_3 = u_3 + q_1 v_1 + q_2 v_2$$

tuto rovnost nejdříve skalárně vynásobíme vektorem v_1 a pak vektorem v_2, čímž dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých q_1 a q_2

$$\langle v_3, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle + q_1\langle v_1, v_1\rangle + q_2\langle v_2, v_1\rangle$$

$$\langle v_3, v_2\rangle = \langle u_3, v_2\rangle + q_1\langle v_1, v_2\rangle + q_2\langle v_2, v_2\rangle$$

z požadavku vzájemné ortogonality všech vektorů báze β plyne

$$0 = 1 + 5q_1 \quad \text{z toho plyne} \quad q_1 = -\frac{1}{5}$$

$$0 = 8 + 30q_2 \quad \text{z toho plyne} \quad q_2 = -\frac{4}{15}$$

tedy

$$v_3^0 = (1, 1, 1)^T - \frac{1}{5}(2, 0, -1)^T - \frac{4}{15}(1, 5, 2)^T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

opět můžeme do báze β zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, např.

$$v_3 = (1, -1, 2)^T$$

a tedy $\beta = [(2, 0, -1)^T, (1, 5, 2)^T, (1, -1, 2)^T]$

Úloha 2: Nechť $W = [(1, -1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 0, -1, 1)^T]$ je podprostor v E_5. Najděte ortogonální doplňek $W^\perp$ tohoto podprostoru.

Řešení: Podle definice 3.10. je ortogonální doplněk podprostoru množina všech vektorů kolmých ke všem vektorům zadaného podprostoru. Rozmyslíme-li si tuto definici, je zřejmé, že stačí hledat množinu všech vektorů kolmých k vektorům báze podprostoru W. Označíme si vektory báze postupně v_1, v_2, v_3 a uvažujeme libovolný vektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ takový, že $x \in W^\perp$, pak platí:

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad x \perp v_1 \wedge x \perp v_2 \wedge x \perp v_3$$

a tedy

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad \langle x, v_1\rangle = 0; \langle x, v_2\rangle = 0; \langle x, v_3\rangle = 0$$

$$\text{z toho plyne} \qquad \begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 0 \end{array}$$

dále řešíme tuto soustavu rovnic pro nalezení tvaru vektoru x úpravou na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových úprav

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

zavedeme parametry a, b a dostáváme:

$$x_5 = b;\ x_4 = a;\ x_3 = -a - b;\ x_2 = -b;\ x_1 = a$$

podprostor vektorů x, což je podprostor vektorů kolmých na vektory báze podprostoru W, a tedy ortogonální doplňek podprostoru W, je generován vektory, které dostáváme nezávislou volbou parametrů a a b

$$W^\perp = [(1, 0, -1, 1, 0)^T, (0, -1, -1, 0, 1)^T]$$

Úloha 3: Najděte kolmý průmět vektoru v do podprostoru $W = [w_1, w_2]$ v E_4, kde $w_1 = (1, -1, -1, 2)^T$, $w_2 = (3, 1, 0, 1)^T$, $v = (-2, 2, 2, 5)^T$.

Řešení: Kolmý průmět Pv vektoru v předpokládáme ve tvaru lineární kombinace vektorů báze podprostoru W, do kterého promítáme

$$Pv = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

Aby šlo o kolmou projekci, musí být podle definice 3.11. vektor $v - Pv$ kolmý na podprostor W, a tedy musí platit:

$$\begin{array}{ccc} v - Pv & \perp & w_1 \\ v - Pv & \perp & w_2 \end{array}$$

z toho plyne

$$\begin{array}{rrrcl} \langle v, w_1\rangle & -a_1\langle w_1, w_1\rangle & -a_2\langle w_2, w_1\rangle & = & 0 \\ \langle v, w_2\rangle & -a_1\langle w_2, w_1\rangle & -a_2\langle w_2, w_2\rangle & = & 0 \end{array}$$

po vyčíslení skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{array}{rrrcl} 8 & -7a_1 & -6a_2 & = & 0 \\ 1 & -6a_1 & -11a_2 & = & 0 \end{array}$$

řešením této soustavy rovnic je $a_1 = 2$ a $a_2 = -1$, tedy

$$Pv = 2(1, 1, -1, 2) - (3, 1, 0, 1) = (-1, 1, -2, 3)$$

Cvičení

1. Zjistěte zda je zobrazení $g : R^2 \times R^2 \to R$ skalární součin
   (a) $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
   (b) $g(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2$
   (c) $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$
2. Zjistěte, zda je zobrazení $g : R^3 \times R^3 \to R$ skalární součin
   (a) $g(u, v) = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$
   (b) $g(u, v) = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$
   (c) $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + 2u_3v_3$
   (d) $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_2v_3 - u_3v_2 + 3u_3v_3$
   (e) $g(u, v) = 3u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
3. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ je pro libovolné dva polynomy f, g definováno reálné číslo $\langle f, g\rangle$. Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.
   (a) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$
   (b) $\langle f, g\rangle = 1$
4. Ve vektorovém prostoru $Mat_{22}(R)$ je pro libovolné vektory $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ definováno reálné číslo $\langle A, B\rangle$. Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.
   (a) $\langle A, B\rangle = \det(A.B)$
   (b) $\langle A, B\rangle = \det(A + B)$

(c) $\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_4b_4$

(d) $\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$

5. Zkuste na R^2 najít takový skalární součin, aby vektory u a v byly na sebe kolmé.

   (a) $u = (1, 2)^T$, $v = (2, 3)^T$

   (b) $u = (-5, 2)^T$, $v = (10, -4)^T$

6. Najděte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(3, 2, -4, 6)^T$, $(8, 1, -2, -16)^T$, $(5, 12, -14, 5)^T$, $(11, 3, 4, -7)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

7. Určete ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(1, 0, 4, -1)^T$, $(1, -4, 0, 1)^T$, $(-4, 1, 1, 0)^T$ a jeho ortogonálního doplňku v euklidovském prostoru E_4.

8. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(1, 1, -1, -1)^T$, $(1, -1, 1, 1)^T$, $(-1, -2, 0, 1)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

9. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, je-li:

   (a) $V = E_4$, $W = [(1, 2, 2, -1)^T, (1, 1, -5, 3)^T, (3, 2, 8, -7)^T]$

   (b) $V = E_4$, $W = [(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 0, -7)^T, (3, -2, 3, 14)^T]$

   (c) $V = E_5$, $W = [(1, 2, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 3, 0, 1)^T, (1, 3, -3, 2, 3)^T, (1, -1, 9, -2, -1)^T]$

   (d) $V = E_5$, $W = [(1, -1, 0, 1, 1)^T, (1, -1, 1, 0, -1)^T, (1, -2, -2, 0, 0)^T, (1, -4, 1, 3, 4)^T]$

10. V euklidovském prostoru E_4 jsou dány vektory u, v. Ukažte, že tyto vektory jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru. Přitom:

    (a) $u = (1, -2, 2, 1)^T$, $v = (1, 3, 2, 1)^T$

    (b) $u = (2, 3, -3, -4)^T$, $v = (-1, 3, -3, 4)^T$

    (c) $u = (1, 7, 7, 1)^T$, $v = (-1, 7, -7, 1)^T$

11. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $R_3[x]$ se skalárním součinem definovaným $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Najděte matici přechodu od nalezené báze α do standardní báze $[1, x, x^2, x^3]$.

12. V euklidovském prostoru E_5 je dán podprostor W. Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

    (a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t); r, s, t \in R\}$

    (b) $W = [(1, -1, 2, 1, -3)^T, (2, 1, -1, -1, 2)^T, (1, -7, 12, 7, -19)^T, (1, 5, -8, -5, 13)^T]$

13. V euklidovském prostoru E_4 nalezněte ortonormální bázi podprostoru vektorů, které jsou ortogonální k vektorům $u = (1, 1, 1, 1)^T$, $v = (1, -1, -1, 1)^T$, $w = (2, 1, 1, 3)^T$.

14. Určete všechny hodnoty parametru $a \in R$, pro které je zadaný vektor u z euklidovského prostoru V normovaný. Přitom:

    (a) $V = E_5$, $u = (a+1, 0, a+2, 0, a+1)^T$

    (b) $V = R_2[x]$, se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $u = 3x^2 + a$

    (c) $V = R_2[x]$, se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$, $u = 3x^2 + a$

15. Najděte ortogonální doplněk podprostoru P generovaného vektory $(-1, 2, 0, 1)^T$, $(3, 1, -2, 4)^T$, $(-4, 1, 2, -4)^T$ v E_4.

16. V euklidovském prostoru E_4 jsou dány podprostory $W = [u_1, u_2, u_3]$ a $S = [v]$, kde $u_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $u_2 = (-2, 6, 0, 8)^T$, $u_3 = (-3, 1, -2, 2)^T$, $v = (1, a, 3, b)^T$.

    (a) Nalezněte ortogonální bázi W.

    (b) Určete hodnoty a, b tak, aby podprostory W, S byly kolmé.

17. Najděte ortogonální průmět vektoru $(1, 2, 3)^T$ do podprostoru generovaného vektory $(-1, 1, 1)^T$, $(1, 1, 1)^T$ v E_3.

18. Nechť je $L = [u, v, w]$ podprostor v E_4. Najděte kolmý průmět vektoru z do $L^\perp$.

    (a) $z = (4, 2, -5, 3)^T$, $u = (5, 1, 3, 3)^T$, $v = (3, -1, -3, 5)^T$, $w = (3, -1, 5, -3)^T$

    (b) $z = (2, 5, 2, -2)^T$, $u = (1, 1, 2, 8)^T$, $v = (0, 1, 1, 3)^T$, $w = (1, -2, 1, 1)^T$

19. V euklidovském prostoru V najděte ortogonální projekci vektoru u do podprostoru W, je-li:

    (a) $V = E_4$, $u = (-2, 2, 2, 5)^T$, $W = [(1, 1, -1, 2)^T, (3, 1, 0, 1)^T, (2, 0, 1, -1)^T]$

    (b) $V = E_4$, $u = (2, 7, -3, -6)^T$, $W = \{(r+s, r+s, -r-3s, 2r+3s); r, s \in R\}$

    (c) $V = E_4$, $u = (1, 2, 3, 4)^T$, $W = [(0, 1, 0, 1)^T]$

    (d) $V = E_4$, $u = (4, -1, -3, 4)^T$, $W = [(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 2, -1)^T, (1, 0, 0, 3)^T]$

20. Nechť u, v jsou vektory z euklidovského prostoru V. Dokažte, že platí nerovnost $|\,\|u\| - \|v\|\,| \le \|u - v\|$.

21. Dokažte, že pro libovolných n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

    (Návod: Použijte Cauchyovu-Schwartzovu nerovnost.)

22. Dokažte, že pro libovolnou spojitou funkci f platí

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sqrt{\frac{1}{a-b}\int_a^b f^2(x)\,dx}\,.$$

(Návod: Použijte Cauchyovu-Schwartzovu nerovnost.)

23. Dokažte, že je-li $2x+4y=1$, pro libovolná $x,y \in R$, pak $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$.

24. Dokažte, že pro libovolná $x,y,z \in R$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}\,.$$

25. Dokažte,že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ platí

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\cdots+a_n\,.$$

26. Dokažte,že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ platí

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2\,.$$

27. Určete velikost výslednice F čtyř komplanárních sil (tj. sil ležících v jedné rovině) F_1, F_2, F_3, F_4 působících z jediného bodu, jestliže velikost každé síly je $10\,N$ a úhel mezi dvěma sousedními silami je

   (a) $\alpha = 30^o$

   (b) $\beta = 45^o$

28. Tři síly F_1, F_2, F_3 působí z jednoho bodu v prostoru. Každé dvě síly svírají stejný úhel α. Velikosti těchto sil jsou $|F_1| = 2\,N$, $|F_2| = 3\,N$, $|F_3| = 4\,N$. Určete úhel α tak, aby velikost výslednice sil byla $F = 5\,N$.