4. EUKLIDOVSKÁ ANALYTICKÁ GEOMETRIE - VZDÁLENOST A ÚHEL

Teorie

4.1. Definice. Nechť A, B jsou body euklidovského prostoru R^n. Pak reálné číslo $\rho(A,B) = \|A-B\|$, tj. velikost vektoru $A-B$, nazýváme *vzdáleností bodů* A a B.

4.2. Definice. Nechť M je podprostor euklidovského prostoru R^n a A bod z tohoto prostoru. Pak, *vzdáleností bodu A od afinního podprostoru M* nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(A,M)$, definované

$$\rho(A,M) = \min\{\|A-B\|,\ B \in M\}$$

.

4.3. Věta. *Nechť M je afinní podprostor v R^m a $B \in M$ je libovolný bod z M, pak vzdálenost bodu $A \in R^n$ od afinního podprostoru M je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A-B$ do ortogonálního doplňku zaměření podprostoru M, tj. do $Z^{\perp}(M)$.*

4.4. Definice. Nechť P, Q jsou podprostory euklidovského prostoru R^n. Pak *vzdáleností podprostorů* P, Q nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(P,Q)$, definované

$$\rho(P,Q) = \min\{\|A-B\|;\ A \in P,\ B \in Q\}$$

.

4.5. Věta. *Nechť P, Q jsou dva afinní podprostory, $A \in P$ je libovolný bod z P a $B \in Q$ libovolný bod z Q , pak vzdálenost podprostorů P a Q je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A-B$ do $[Z(P)+Z(Q)]^{\perp}$.*

4.6. Definice. Nechť $u, v \in V$ jsou nenulové vektory. Pak *odchylkou jednorozměrných podprostorů* $[u]$, $[v]$ ve V rozumíme reálné číslo ϕ (někdy značíme $\phi(u,v)$), pro které platí:

$$\cos\phi = \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

4.7. Definice. Nechť U, V jsou podprostory euklidovského vektorového prostoru. Pak *odchylku podprostorů* U, V definujeme takto:

(a) Je-li $U \subseteq V$ nebo $V \subseteq U$, pak $\phi(U,V) = 0$.

(b) Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak $\phi(U,V) = \min\{\alpha(u,v);\ u \in U,\ v \in V;\ u, v \neq o\}$.

(c) Je-li $U \cap V \neq \{o\}$, pak $\phi(U,V) = \phi(U \cap (U \cap V)^{\perp},\ V \cap (U \cap V)^{\perp})$.

4.8. Věta. *Nechť v je vektor a U je podprostor v euklidovském prostoru R^n. Nechť Pv je ortogonální projekce vektoru v do podprostoru U. Pak odchylka vektorových podprostorů*

U a [v] je

$$\cos\phi(U,[v]) = \cos\phi(v,Pv) = \frac{\|Pv\|}{\|v\|}$$

.

4.9. Věta. *Nechť N_1, N_2 jsou nadroviny v euklidovském vektorovém prostoru R^n, $n \geq 2$ a nechť a je normálový vektor nadroviny N_1 a b je normálový vektor nadroviny N_2. Pak odchylka těchto nadrovin je odchylka jejich normálových vektorů.*

$$\cos\phi(N_1,N_2) = \cos\phi(a,b)$$

4.10. Definice. *Odchylkou dvou afinních podprostorů P, Q* rozumíme odchylku jejich zaměření $Z(P)$, $Z(Q)$.

Řešené příklady

Úloha 1: V euklidovském prostoru E_4 určete vzdálenost roviny $\sigma : (4,1,1,0)+t(1,-1,0,0)+s(2,0,-1,0)$ a přímky $p : (5,4,4,5)+r(0,0,1,-4)$.

Řešení:

1. způsob:

Nejprve najdeme ortogonální doplněk součtu zaměření roviny a přímky

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Zavedeme parametr t, čili $x_4 = t$,pak $x_3 = 4t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = 2t$, zvolíme-li např. $t = 1$, dostáváme $[Z(\sigma)+Z(p)]^\perp = [(2,2,4,1)^T]$, označme tento vektor u.

Nyní zvolíme libovolné body $A \in \sigma$, $B \in p$, např. $A = (4,1,1,0)^T$, $B = (5,4,4,5)^T$, a označíme vektor $A - B = x = (1,3,3,5)^T$. Podle věty 4.5. je vzdálenost roviny a přímky rovna průmětu vektoru x do podprostoru $[u]$. Hledáme tedy kolmý průmět Px.

Předpokládáme Px ve tvaru:

$$Px = au$$

$$x - Px \perp u \quad \text{z toho plyne} \quad \langle x,u\rangle - a\langle u,u\rangle = 0$$

$$25 - 25a = 0 \quad \text{a tedy} \quad a = 1 \quad \text{pak} \quad Px = u = (2,2,4,1)^T$$

$$\rho(\sigma,p) = \|Px\| = 5$$

2.způsob:

Opět potřebujeme najít ortogonální doplňek součtu zaměření obou podprostorů, který jsme určili v předcházejícím výpočtu $[Z(\sigma)+Z(p)]^\perp = [(2,2,4,1)^T]$, označme tento vektor u.

Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in p$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, p)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i přímce p a tedy $A_0 - B_0 \in [Z(\sigma) + Z(p)]^\perp$, tzn. je lineární kombinací vektoru báze $[Z(\sigma) + Z(p)]^\perp$

$$A_0 - B_0 = ku\,.$$

Dále víme:

$$A_0 = (4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0)$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$$

a tedy $(4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0) - (5,4,4,5) - r(0,0,1,-4) = k(2,2,4,1)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrrcl} t & +2s & & -2k & = & 1 \\ -t & & & -2k & = & 3 \\ & -s & -r & -4k & = & 3 \\ & & 4r & -k & = & 5 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 25 \end{array}\right)$$

z toho plyne $k = -1$, $r = 1$, $s = 0$, $t = -1$.
A tedy

$$A_0 - B_0 = -1u = (-2,-2,-4,-1)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, p) = \|u\| = 5\,,$$

dále můžeme taky určit body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje:

$$A_0 = (4,1,1,0) - (1,-1,0,0) = (3,2,1,0)^T$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + (0,0,1,-4) = (5,4,5,1)^T$$

3.způsob:
Budeme potřebovat bázi součtu zaměření, což je např. $Z(\sigma)+Z(p) = [(1,-1,0,0)^T, (2,0,-1,0)^T, (0,0,1,-4)^T]$, označme tyto vektory postupně v_1, v_2, v_3.

Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in p$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, p)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i přímce p a tedy $A_0 - B_0$ je kolmý k $Z(\sigma) + Z(p)$, tzn. je kolmý k vektorům báze $Z(\sigma) + Z(p)$, tedy $A_0 - B_0 \perp v_1$, $A_0 - B_0 \perp v_2$, $A_0 - B_0 \perp v_3$.
Dále víme:

$$A_0 = (4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0)$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$$

a tedy $\quad A_0 - B_0 = (-1,-3,-3,-5) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0) - r(0,0,1,-4)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \langle A_0 - B_0, v_1 \rangle &= 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_2 \rangle &= 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_3 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2t & +2s & & = & -2 \\ 2t & +5s & +r & = & -1 \\ & -s & -17r & = & -17 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

z toho plyne $r = 1$, $s = 0$, $t = -1$.
A tedy

$$A_0 = (4,1,1,0) - (1,-1,0,0) = (3,2,1,0)^T$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + (0,0,1,-4) = (5,4,5,1)^T$$

z toho plyne

$$A_0 - B_0 = (-2,-2,-4,-1)^T$$

$$\rho(\sigma, p) = \|A_0 - B_0\| = 5\,.$$

Úloha 2: Určete vzdálenost rovin

$\sigma : (4,5,3,2) + t(1,2,2,2) + s(2,0,2,1);\ \tau : (1,-2,1,-3) + r(2,-2,1,2) + p(1,-2,0,-1)$

v euklidovském prostoru E_4.

Řešení:

1. způsob:

Nejprve najdeme ortogonální doplněk součtu zaměření obou rovin

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z toho plyne, že $x_4 = 0$, dále zavedeme parametr t, čili $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{1}{2}t$, $x_1 = -t$, zvolíme-li např. $t = -2$, dostáváme $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp} = [(2, 1, -2, 0)^T]$, označme tento vektor u (Je vidět, že roviny jsou částečně rovnoběžné).
Nyní zvolíme libovolné body $A \in \sigma$, $B \in \tau$, např. $A = (4, 5, 3, 2)^T$, $B = (1, -2, 1, -3)^T$, a označíme vektor $A - B = x = (3, 7, 2, 5)^T$. Podle věty 4.5. je vzdálenost rovin rovna průmětu vektoru x do podprostoru $[u]$. Hledáme tedy kolmý průmět Px.
Předpokládáme Px ve tvaru:

$$Px = au$$

$$x - Px \perp u \quad \text{z toho plyne} \quad \langle x, u\rangle - a\langle u, u\rangle = 0$$

$$9 - 9a = 0 \quad \text{a tedy} \quad a = 1 \quad \text{pak} \quad Px = u = (2, 1, -2, 0)^T$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|Px\| = 3$$

2.způsob:

Opět potřebujeme najít ortogonální doplňek součtu zaměření obou rovin, který jsme určili v předcházejícím výpočtu $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp} = [(2, 1, -2, 0)^T]$, označme tento vektor u.
Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in \tau$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, \tau)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i τ a tedy $A_0 - B_0 \in [Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp}$, tzn. je lineární kombinací vektoru báze $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp}$

$$A_0 - B_0 = ku\,.$$

Dále víme:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1)$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) + r(2, -2, 1, 2) + p(1, -2, 0, -1)$$

a tedy $\quad (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1) - (1, -2, 1, -3) - r(2, -2, 1, 2) - p(1, -2, 0, -1) =$

$$= k(2, 1, -2, 0)\,.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{cccccccc} 2k & +p & +2r & -2s & -t & = & 3 \\ k & -2p & -2r & & -2t & = & 7 \\ -2k & & +r & -2s & -2t & = & 2 \\ & -p & +2r & -1s & -2t & = & 5 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

zvolíme např. $t = 1$, pak $s = -3$, $r = 0$, $p = -4$, $k = 1$.
A tedy

$$A_0 - B_0 = 1u = (2, 1, -2, 0)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|u\| = 3\,,$$

dále můžeme taky určit body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + (1, 2, 2, 2) - 3(2, 0, 2, 1) = (-1, 7, -1, 1)^T$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) - 4(1, -2, 0, -1) = (-3, 6, 1, 1)^T$$

Zde by nás mohla zmást volba $t = 1$, zkusme tedy, co se stane, když zvolíme $t = 2$, pak $s = -4$, $r = 0$, $p = -5$, $k = 1$. Hodnota k se nezměnila a nezmění se tedy ani hodnota vzdálenosti.

$$A_0 - B_0 = 1u = (2, 1, -2, 0)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|u\| = 3\,,$$

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + 2(1, 2, 2, 2) - 4(2, 0, 2, 1) = (-2, 9, -1, 2)^T$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) - 5(1, -2, 0, -1) = (-4, 8, 1, 2)^T$$

Jinou volbou se vzdálenost nezmění, pouze se změní body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje. To znamená, že vzdálenost se může realizovat v nekonečně mnoha bodech (to odpovídá nekonečně mnoha volbám parametru), což je způsobeno tím, že roviny jsou částečně rovnoběžné.

3.způsob:
Budeme potřebovat bázi součtu zaměření. Snadno zjistíme, že je to např. $Z(\sigma) + Z(\tau) = [(1, 2, 2, 2)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (2, -2, 1, 2)^T]$, označme tyto vektory postupně v_1, v_2, v_3.
Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in \tau$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, \tau)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i τ a tedy $A_0 - B_0$ je kolmý k $Z(\sigma) + Z(\tau)$, tzn. je kolmý k vektorům báze $Z(\sigma) + Z(\tau)$, tedy $A_0 - B_0 \perp v_1$, $A_0 - B_0 \perp v_2$, $A_0 - B_0 \perp v_3$.
Dále víme:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1)$$

$$B_0 = (1,-2,1,-3) + r(2,-2,1,2) + p(1,-2,0,-1)$$

a tedy $\quad A_0 - B_0 = (3,7,2,5) + t(1,2,2,2) + s(2,0,2,1) - r(2,-2,1,2) - p(1,-2,0,-1)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \langle A_0 - B_0, v_1\rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_2\rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_3\rangle & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 13t & +8s & -4r & +5p & = & -31 \\ 8t & +9s & -8r & -p & = & -15 \\ 4t & +8s & -13r & -4p & = & -4 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{cccccc} 4 & 8 & -13 & -4 & | & -4 \\ 8 & 9 & -8 & -1 & | & -15 \\ 13 & 8 & -4 & 5 & | & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 4 & 8 & -13 & -4 & | & -4 \\ 0 & -7 & 18 & 7 & | & -7 \\ 0 & 8 & -17 & -8 & | & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 4 & 8 & -13 & -4 & | & -4 \\ 0 & -7 & 18 & 7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

z toho plyne $r = 0$, zvolíme $p = 1$, pak $s = 2$, $t = -4$.
A tedy

$$A_0 = (4,5,3,2) - 4(1,2,2,2) + 2(2,0,2,1) = (4,-3,-1,-4)^T$$

$$B_0 = (1,-2,1,-3) + (1,-2,0,-1) = (2,-4,1,-4)^T$$

z toho plyne

$$A_0 - B_0 = (2,1,-2,0)^T$$

$$\rho(\sigma,\tau) = \|A_0 - B_0\| = 3\,.$$

Volba za p opět není jednoznačná, zvolíme-li jinak, dostaneme jiné body, ve kterých se vzdálenost realizuje, ale hodnota vzdálenosti se nezmění.

Úloha 3: Určete úhel přímky $p : (1,2,3,4) + t(-3,15,1,-5)$ a podprostoru $B : (0,0,0,0) + r(1,-5,-2,10) + s(1,8,-2,-16)$ v E_4.

Řešení: Označme vektor, který generuje zaměření přímky p, u a vektory, ktaré generují zaměření podprostoru B, postupně x, y. Podle věty 4.8. je úhel p a B roven úhlu, který svírá vektor u a jeho ortogonální projekce Pu do $Z(B)$. Hledáme tedy Pu:

$$Pu = a_1 x + a_2 y$$

$$u - Pu \perp B \quad \text{z toho plyne} \quad u - Pu \perp x \wedge u - Pu \perp y$$

$$\begin{array}{rrrcl} \langle u,x\rangle & -a_1\langle x,x\rangle & -a_2\langle x,y\rangle & = & 0 \\ \langle u,y\rangle & -a_1\langle x,y\rangle & -a_2\langle y,y\rangle & = & 0 \end{array}$$

po vyčíslení skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{array}{rrrcl} -130 & -130a_1 & +195a_2 & = & 0 \\ 195 & +195a_1 & -325a_2 & = & 0\,. \end{array}$$

Vyřešením této soustavy dostáváme $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, a tedy

$$Pu = -x = (-1, 5, 2, -10)^T$$

$$\text{z toho plyne} \qquad \cos\phi(p, B) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \sqrt{\frac{130}{260}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi(p, B) = \frac{\pi}{4}$$

Úloha 4: Nalezněte odchylku ϕ roviny $\sigma : (2, 1, 0, 1) + t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1)$ a roviny $\tau : (1, 0, 1, 1) + r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$ v prostoru E_4.

Řešení: Budeme postupovat podle definice 4.7. Nejprve budeme hledat průnik zaměření obou rovin $Z(\sigma) \cap Z(\tau)$.

$$t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1) = r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tzn. $r = p$ a $Z(\sigma) \cap Z(\tau) = \big[(1, 0, 1, 0)^T\big]$.

Dále musíme najít $P = Z(\sigma) \cap (Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp$ a $Q = Z(\tau) \cap (Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp$. Jde vidět, že $(Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp = \big[(1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\big]$. Pak najdeme P:

$$k_1(1, 0, -1, 0) + k_2(0, 1, 0, 0) + k_3(0, 0, 0, 1) = t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Tzn. $t = -s$ a $P = \big[(0, 1, 0, 1)^T\big]$, označme tento vektor a.

Nyní najdeme Q:

$$k_1(1, 0, -1, 0) + k_2(0, 1, 0, 0) + k_3(0, 0, 0, 1) = r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Tzn. $r = -p$ a $Q = \left[(1, 4, -1, 0)^T\right]$, označme tento vektor b.

Úhel daných rovin je pak roven úhlu, který svírají vektory a a b.

$$\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\,\sqrt{18}} = \frac{2}{3}$$

Cvičení

1. V euklidovském prostoru E_4 resp. E_5 určete vzdálenost bodu A od podprostoru P.
   (a) $A = (4, 1, -4, -5)$; $P : (3, -2, 1, 5) + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2)$
   (b) $A = (1, 1, -2, -3, -2)$; $P : (3, 7, -5, 4, 1) + t(1, 1, 2, 0, 1) + s(2, 2, 1, 3, 1)$
   (c) $A = (2, 1, -3, 4)$; $P : 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0$
   (d) $A = (1, -3, -2, 9, -4)$; $P : x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2 = 0, x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 - 1 = 0$
   (e) $A = (2, 1, 4, -5)$; $P : (1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 2, -2)$
   (f) $A = (-9, 2, 1, -5)$; $P : (1, 2, 0, 0) + t(-1, 1, 1, 3) + s(0, -2, 1, -1)$
   (g) $A = (4, 2, -5, 1)$; $P : 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 9 = 0, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 12 = 0$
   (h) $A = (2, 1, -1, 0)$; $P : 3x_1 + x_3 - x_4 + 6 = 0$
2. Určete vzdálenost přímek p, q v euklidovském prostoru E_n (pro $n = 3, 4, 5$).
   (a) $p : (9, -2, 0) + t(4, -3, 1)$;
   $q : (0, -7, 2) + s(-2, 9, 2)$
   (b) $p : (6, 3, -3) + t(-3, 2, 4)$;
   $q : (-1, -7, 4) + s(-3, 3, 8)$
   (c) $p : (2, -2, 1, 7) + t(0, 4, -2, -3)$;
   $q : (3, 0, 0, -1) + s(-2, 0, 1, 1)$
   (d) $p : (7, 5, 8, 1) + t(2, 0, 3, 1)$;
   $q : x_1 - 4x_3 + 7 = 0, x_2 + 2x_3 - 5 = 0, x_4 - 3 = 0$
   (e) $p : (-3, 2, 3, 3) + t(-1, 1, 1, 0)$;
   $q : (6, 5, 7, 3) + r(0, 0, -1, 2)$
3. Určete vzdálenost přímky p a roviny τ v euklidovském prostoru E_4 resp. E_5.
   (a) $p : (1, 3, -3, -1) + t(1, 0, 1, 1)$;
   $\tau : -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3;\ -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4$

(b) $p : (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$;
$\tau : (4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0)$

(c) $p : (1,6,-6,4) + t(1,-5,8,5)$;
$\tau : (6,3,-5,5) + s(1,-2,2,2) + r(2,-1,-2,1)$

4. Určete vzdálenost rovin τ a σ v euklidovském prostoruE_4 resp. E_5, je-li:

(a) $\tau : x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2;\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3;\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3$;
$\sigma : (1,-2,5,8,2) + t(0,1,2,1,2) + s(2,1,2,-1,1)$

(b) $\tau : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4;\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 9$;
$\sigma : x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -25;\ x_1 - x_3 + x_4 = 15$

(c) $\tau : (5,0,-1,9,3) + t(1,1,0,-1,-1) + s(1,-1,0,-1,1)$;
$\sigma : (3,2,-4,7,5) + r(1,1,0,1,1) + u(0,3,0,1,-2)$

(d) $\tau : (4,2,2,2,0) + t(1,2,2,-1,1) + s(2,1,-2,1,-1)$;
$\sigma : x_1 - x_2 = 0;\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = -1;\ x_3 + x_4 - x_5 = 4$

(e) $\tau : (0,2,6,-5) + t(-7,1,1,1) + s(-10,1,2,3)$;
$\sigma : x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3;\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$

(f) $\tau : (-4,3,-3,2,4) + t(2,0,1,1,1) + s(-5,1,0,1,1)$;
$\sigma : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6;\ x_1 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$

5. Určete odchylku ϕ přímky $p = \{A, [u]\}$ a podprostoru B v E_4 resp. E_5.

(a) $u = (1,0,3,0)^T$; $B : (1,1,1,1) + t(1,1,4,5) + s(5,3,4,-3) + r(2,-1,1,2)$

(b) $u = (1,2,-2,1)^T$; $B : (1,1,1,1) + t(2,-2,1,-1)$

(c) $u = (1,3,-1,3)^T$; $B : 3x_1 + x_3 - 4x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1$

(d) $u = (3,1,\sqrt{2},-2)^T$; $B : (1,2,1,1)+t(-1,1,-1,0)+s(-1,2,-2,1)+r(2,-1,2,1)$

(e) $u = (2,0,2,-1)^T$; $B : 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$

(f) $u = (2,0,0,2,1)^T$; $B : x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7$

(g) $u = (0,1,-1,0,0)^T$; $B : (2,1,1,2,2)+t(2,1,0,1,-1)+s(3,2,0,0,1)+r(0,1,0,1,0)+$
$p(1,0,0,1,3)$

(h) $u = (3,4,4,3)^T$; $B : (2,0,0,1) + t(-2,0,-1,0) + s(1,0,3,0)$

(i) $u = (3,4,4,3)^T$; $B : (2,9,0,6) + t(0,1,0,5) + s(0,2,0,-7)$

(j) $u = (1,-1,1,3)^T$; $B : (3,1,4,5) + t(2,-2,3,0) + s(-1,1,-2,0)$

6. V E_3 určete odchylku rovin τ a σ.

(a) $\tau : 2x - y + z - 1 = 0$; $\sigma : x + y + 2z + 3 = 0$

(b) $\tau : x + 2z - 6 = 0$; $\sigma : x + 2y - 4 = 0$

7. Určete odchylku podprostorů η a ν v E_4 resp. E_5.

(a) $\eta : (1, 2, 5, 1) + t(1, 1, 0, 0) + s(3, 3, 0, 1)$
$\nu : (1, 5, 4, 1) + r(0, 0, 0, -1) + p(2, 0, 0, 1)$

(b) $\eta : (4, 2, 0, 1, 0) + t(1, 1, 1, 0, 0) + s(2, 2, 2, 0, 3)$
$\nu : (1, 1, 0, 1, 0) + r(0, 1, 0, 0, 1) + p(1, 1, 1, 1, 0) + q(1, 1, 1, 1, 1)$

(c) $\eta : (7, 3, 5, 1) + t(0, 0, 1, 0) + s(2, 2, 1, 0)$
$\nu : (1, 3, 4, 1) + r(1, 0, 0, 0) + p(3, 0, 1, 0)$

8. Na přímce $p : x_1 + x_2 + x_4 - 7 = 0,\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 7 = 0,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 9 = 0$ nalezněte bod Q mající stejnou vzdálenost od bodů $A = (-1, 1, 1, 1)^T$ a $B = (3, -1, -2, 2)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

9. Na přímce $p : x + y + 2z = 1,\ 3x + 4y - z = 29$ nalezněte bod Q mající stejnou vzdálenost od bodů $A = (3, 4, 11)^T$ a $B = (-5, -2, -13)^T$ v euklidovském prostoru E_3.

10. Nalezněte podprostor C v E_5, který prochází bodem $Q = (1, 0, 1, 0, 1)^T$ a je kolmý k podprostoru

$$B : \begin{array}{rrrrrcl} 19x_1 & +11x_2 & -4x_3 & +5x_4 & +x_5 & = & 3 \\ 7x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 1 \end{array} .$$

11. Nalezněte podprostor C v E_5, který prochází bodem $Q = (-1, 2, 5, 1, 4)^T$ a je kolmý k podprostoru B danému bodem $A = (3, 2, 1, 1, 2)^T$ a vektory $u = (7, 2, 1, 1, 3)^T$, $v = (0, 4, -2, 1, -1)^T$.

12. Bodem $Q = (2, 1, -3)^T$ v E_3 veďte v rovině $\rho : 3x - 2y + z = 1$ přímku q, která je kolmá k přímce $p : (4, 5, 3) + t(-6, 6, 1)$.

13. V E_3 nalezněte rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou $\sigma : 3x - 6y - 2z + 14 = 0$ a mající od ní vzdálenost 3.

14. V E_3 nalezněte rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou $\sigma : 2x - 2y - z - 7 = 0$ a mající od ní vzdálenost 5.

15. Jsou dány body $A = (-4, 1, 2)$ a $B = (3, 5, -1)$ v E_3. Určete bod C, víte-li, že střed dvojice bodů AC leží na přímce $p : (1, 0, 1) + t(1, 1, 0)$ a střed dvojice bodů BC leží v rovině $\rho : x - y + 7z + 1 = 0$.

16. Napište rovnici geometrického místa bodů v E_3 stejně vzdálených od bodu $A = (a, \frac{a}{2}, a)$ a bodu $B = (0, \frac{a}{2}, 0)$.

17. Na přímce $q : (1, -1, 0) + t(1, -2, -3)$ v E_3 urćrte bod Q mající od roviny $\rho : 2x + y - z + 2 = 0$ vzdálenost $\sqrt{6}$.

18. Na přímce $q : x - y + z - 3 = 0; 2x - 3y + 3z + 6 = 0$ v E_3 určete bod Q mající od roviny $\rho : x - 2y + z - 2 = 0$ vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

19. Najděte rovinu v E_3 rovnoběžnou s rovinami $\rho : 3x + 2y - 2z - 3 = 0$ a $\sigma : 6x + 4y - 4z + 1 = 0$, která dělí vzdálenost mezi nimi v poměru 2:3.

20. Odvoďte vztah pro vzdálenost bodu $A = (y_1, \ldots, y_n)$ od nadroviny $N : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ v E_n.