Matice bilineární formy f na vektorovém prostoru V vzhledem k bázi $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ je taková matice A, která splňuje

$$f(u, v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha.$$

Jinými slovy, pokud napíšeme vektory u, v v bázi α, tedy jako lineární kombinace

$$\begin{aligned} u &= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \\ v &= b_1 e_1 + \dots + b_n e_n, \end{aligned}$$

hodnotu $f(u, v)$ spočteme jako

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Matice A je takto dána jednoznačně a platí, že v i-tém řádku a j-tém sloupci je $f(e_i, e_j)$.

Příklad 4. Nechť V je vektorový prostor dimenze 2 a $\alpha = (e_1, e_2)$ nějaká jeho báze. Nechť f je bilineárni forma na V daná hodnotami na bázových vektorech:

$$\begin{aligned} f(e_1, e_1) &= -1 & \qquad f(e_1, e_2) &= 0 \\ f(e_2, e_1) &= 3 & \qquad f(e_2, e_2) &= 1 \end{aligned}$$

Napište matici A této formy vzhledem k bázi α a matici B této formy vzhledem k bázi $\beta = (e_1 + e_2, e_1 - 2e_2)$.

Řešení. Matice A má v i-tém řádku, j-tém sloupci hodnotu $f(e_i, e_j)$, takže můžeme okamžitě psát

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme si, proč to tak skutečně vyjde. Nechť $u, v \in V$ jsou libovolné vektory. Umíme je napsat jako lineární kombinace prvků z α:

$$\begin{aligned} u &= ae_1 + be_2 \\ v &= ce_1 + de2 \end{aligned}$$

S využitím bilinearity f počítáme

$$\begin{aligned} f(u, v) = f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) &= af(e_1, ce_1 + de_2) + bf(e_2, ce_1 + de_2) = \\ &= acf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1) + bdf(e_2, e_2) = \\ &= -ac + 3bc + bd = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy matice $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má skutečně požadovanou vlastnost. (Uvědomte, si že $(u)_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ a $(v)_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$).

Nyní hledáme matici B vzhledem k bázi $\beta = (e_1+e_2, e_1-2e)$. Prvky β označíme například

$$\begin{aligned}\tilde{e_1} &= e_1 + e_2\\ \tilde{e_2} &= e_1 - 2e_2.\end{aligned}$$

Matice B má v i-tém řádku, j-tém sloupci hodnotu $f(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$:

$$B = \begin{pmatrix} f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) & f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \\ f(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1) & f(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \end{pmatrix},$$

zbývá tedy spočítat tyto hodnoty. Protože platí

$$\tilde{e_1} = 1e_1 + 1e_2 \quad \tilde{e_2} = 1e_1 - 2e_2,$$

souřadnice $\tilde{e}_1$ a $\tilde{e}_2$ v α jsou

$$(\tilde{e}_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\tilde{e}_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

S využitím matice A tak můžeme počítat

$$\begin{aligned}
f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) &= (\tilde{e}_1)_\alpha^T A (\tilde{e}_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\\
f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) &= (\tilde{e}_1)_\alpha^T A (\tilde{e}_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0\\
f(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1) &= (\tilde{e}_2)_\alpha^T A (\tilde{e}_1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -9\\
f(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) &= (\tilde{e}_2)_\alpha^T A (\tilde{e}_2)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3
\end{aligned}$$

Matice B tedy vyjde

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\square$