Singulární rozklad

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení dané maticí A. Singulární rozklad A je součin

$$A = PSQ^{-1},$$

kde P a Q jsou ortogonální matice a S je tvaru

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & s_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

Hodnotám $s_1, \ldots, s_r$ říkáme singulární hodnoty.

Matice A je matice zobrazení f ve standardních bazích a singulární rozklad lze chápat

$$\underbrace{(f)_{\varepsilon\varepsilon}}_{A} = \underbrace{(id)_{\varepsilon\beta}}_{P}\underbrace{(f)_{\beta\alpha}}_{S}\underbrace{(id)_{\alpha\varepsilon}}_{Q^{-1}}.$$

Odtud lze snadno přečíst, že singulární rozklad je o hledání bazí

$$\alpha = (u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$$
$$\beta = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_k)$$

tak, že platí

- α i β jsou ortonormální (neboť P a Q mají být ortogonální matice).
- $f(u_1) = s_1 v_1$ až $f(u_r) = s_r v_r$ pro nějaká čísla $s_1, \ldots, s_r$.
- $f(u_{r+1}) = 0$ až $f(u_n) = 0$.

Singulární rozklad najdeme následujícím způsobem:

- Uvážíme matici $A^T A$, tato matice má stejné jádro jako A, je symetrická, a má nezáporná vlastní čísla, která spočítáme.
- Bázi α najdeme jako ortonormální bázi z vlastních vektoru $A^T A$. Vektory $u_1, \ldots, u_r$ budou příslušné nenulovým vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, vektory $u_{r+1}, \ldots, u_n$ budou příslušné nule (která může, nebo nemusí být vlastní číslo).
- Bázi β najdeme tak, že vynormujeme vektory $f(u_1), \ldots, f(u_r)$, které jsou nenulové, a případně je doplníme na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^k$.
- Vždy bude platit $f(u_i) = \sqrt{\lambda_i} v_i$ pro $i = 1, \ldots, r$, tedy singulární hodnoty jsou odmocniny z vlastních čísel $A^T A$. Zbytek u_i se zobrazí na nulu, protože $\ker A = \ker A^T A$.
- Dostaneme $S = (f)_{\beta\alpha}$, $Q = (id)_{\varepsilon\alpha}$ a $P = (id)_{\varepsilon\beta}$.

Příklad 1. Nalezněte singulárního rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Uvědomme si, že A reprezentuje zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Čekáme báze $\alpha = (u_1, u_2)$ a $\beta = (v_1, v_2, v_3)$. Zejména bázi β bude potřeba v průběhu doplnit na ortonormální bázi celého prostoru. Začneme výpočtem matice $A^T A$. Dostaneme

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Pokračujeme výpočtem vlastních čísel $A^T A$. Máme

$$\det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 9)(\lambda - 25),$$

a kořeny jsou tedy $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 25$. Pokračujeme výpočtem vlastních vektorů: Pro $\lambda_1 = 9$ máme

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a řešení je tedy například vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = 25$ máme

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a řešení je tedy například vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá výsledné vektory normovat:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a první hledaná báze je $\alpha = (u_1, u_2)$.

Pokračujeme výpočtem báze β, kterou dostaneme jako obrazy vektorů báze α. Uvědomme si, že vektory pak stejně budeme normovat, takže není nutné počítat přímo $f(u_i)$, ale stačí vzít jejich "celočíselné"násobky, které jsme zvolili jako vlastní vektory $A^T A$. Počítejme

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cílový prostor $\mathbb{R}^3$ má však dimenzi 3 a proto musíme tuto dvojici doplnit na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^3$. Hledáme vektor, který bude kolmý na $(1,-1,4)^T$ a $(5,5,0)^T$. Jeden takový je například $(-2,2,1)$. Nalezené vektory zbývá normovat:

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

a druhá hledaná báze je $\beta = (v_1, v_2, v_3)$.

Singulární hodnoty jsou odmocniny z vlastních čísel $A^T A$:

$$s_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3 \quad s_2 = \sqrt{\lambda_2} = 5,$$

platí tedy

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 3v_1 \\ f(u_2) &= 5v_2. \end{aligned}$$

Z teorie víme, že to tak dopadne, ale je dobré se o tom přesvědčit i výpočtem. Matice S teď bude matice zobrazení f vzhledem k bazím α a β:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}}_{\beta}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 5\\0 & 0\end{pmatrix}}_{S=(f)_{\beta\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix}f(u_1) & f(u_2)\end{pmatrix}}_{f(\alpha)}.$$

Matice Q je matice přechodu od α ke standardní bázi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e_1 & e_2\end{pmatrix}}_{\varepsilon}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{Q=(id)_{\varepsilon\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}}_{\alpha}.$$

Matice P je matice přechodu od β ke standardní bázi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}}_{\varepsilon}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{3}\\\frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}_{P=(id)_{\varepsilon\beta}} = \underbrace{\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}}_{\beta}.$$

□

Všimněte si výhodného maticového zápisu. Poslední tři rovnosti lze sugestivně napsat jako

$$\beta \cdot (f)_{\beta\alpha} = f(\alpha) \quad \varepsilon \cdot (id)_{\varepsilon\alpha} = \alpha \quad \varepsilon \cdot (id)_{\varepsilon\beta} = \beta$$

zejména indexy a označení bazí na sebe navazují. To je dobrá pomůcka, jak si definice matic přechodu a zobrazení pamatovat.

Příklad 2. Nalezněte singulárního rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Uvědomme si, že A reprezentuje zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Čekáme $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ a $\beta = (v_1, v_2)$. Zejména jeden z u_i se určite zobrazí na nulový vektor. Začneme výpočtem matice $A^T A$. Dostaneme

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Pokračujeme výpočtem vlastních čísel matice $A^T A$:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 5-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & 13-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 20\lambda^2 - 75\lambda = -\lambda(\lambda-5)(\lambda-15),$$

kořeny jsou tedy $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 15, \lambda_3 = 0$. Pokračujeme výpočtem vlastních vektorů: Pro $\lambda_1 = 5$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a řešením je třeba vektor } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = 15$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} -13 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a řešením je třeba vektor } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_3 = 0$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a řešením je třeba vektor } \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledné vektory zbývá normovat:

$$u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a první hledaná báze je $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$.

Pokračujeme výpočtem báze β. Tu dostaneme jako obrazy vektorů z α. Uvědomme si, že vektory potom stejně budeme normovat a není tedy nutné počítat přímo $f(u_i)$, ale stačí nám zobrazit jenom jejich "celočíselné"násobky, které jsme dostali jako vlastní vektory matice A^TA. Máme

$$f(\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$$
$$f(\begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\-15\end{pmatrix}$$
$$f(\begin{pmatrix}7\\-5\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

přičemž rovnost $f(u_3) = 0$ plyne taky z toho, že matice A a A^TA mají stejné jádro, viz přednáška. Nenulové vektory normujeme

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^T \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)^T$$

a tyto tvoří bázi $\beta = (v_1, v_2)$.

Singulární hodnoty jsou odmocniny z λ_1, λ_2:

$$s_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{5} \quad s_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{15}$$

a skutečně snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{5}v_1 \\ f(u_2) &= \sqrt{15}v_2 \\ f(u_3) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme S jako matici zobrazení f vzhledem k α a β:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}}_{\beta}\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\0 & \sqrt{15} & 0\end{pmatrix}}_{S=(f)_{\beta\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix}f(u_1) & f(u_2) & f(u_3)\end{pmatrix}}_{f(\alpha)}.$$

Matici Q potom dostaneme jako matici přechodu od α ke standardní bázi

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}}_{\varepsilon}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{2}{5\sqrt{6}} & \frac{7}{5\sqrt{3}}\\ \frac{5}{5\sqrt{2}} & \frac{5}{5\sqrt{6}} & -\frac{5}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-3}{5\sqrt{2}} & \frac{11}{5\sqrt{6}} & \frac{1}{5\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{Q=(id)_{\varepsilon\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}}_{\alpha},$$

a matici P dostaneme jako matici přechodu od β ke standardní bázi

$$\underbrace{\begin{pmatrix}e_1 & e_2\end{pmatrix}}_{\varepsilon}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}}_{P=(id)_{\varepsilon\beta}} = \underbrace{\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}}_{\beta}.$$

□