3. Nechť symetrická bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádření tvaru

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 8x_1y_3 + 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 8x_2y_4 \\ + 8x_3y_1 - 2x_3y_2 + 8x_3y_4 - 8x_4y_2 + 8x_4y_3\,. \end{aligned}$$

Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice bilineární formy f upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty $1, -1$, případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte alespoň dvě různé báze α, β prostoru $\mathbb{R}^4$ lišící se od sebe i tehdy, když se na ně hledí jen jako na množiny vektorů, tak aby v souřadnicích vzhledem k bázi α i vzhledem k bázi β měla daná bilineární forma f nalezený diagonální tvar.

4. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 3 nad tělesem $\mathbb{R}$ je dána bilineární forma $g : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ následujícím předpisem. Pro kterékoliv dva polynomy $p(x)$, $q(x)$ z $\mathbb{R}_3[x]$ je hodnota bilineární formy g na polynomech $p(x)$, $q(x)$ dána formulí

$$\begin{aligned} g\big(p(x), q(x)\big) = p(1){\cdot}q'''(1) + p'(1){\cdot}q''(1) \\ + p''(1){\cdot}q'(1) + p'''(1){\cdot}q(1). \end{aligned}$$

Ověřte, že pak g je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$. Najděte matici této symetrické bilineární formy g v souřadnicích vzhledem ke standardní bázi $\xi = (1, x, x^2, x^3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$. Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice symetrické bilineární formy g upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty $1, -1$, případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte příklad báze γ vektorového prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ takové, aby v souřadnicích vzhledem k bázi γ měla bilineární forma g nalezený diagonální tvar.