Domácí úkoly ke cvičení č. 6

1. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$, to jest ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ke každému z níže uvedených vektorových podprostorů $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^5$ nějakou jeho ortonormální bázi. Každý z těchto podprostorů je zadán jako lineární obal uvedeného souboru vektorů:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= [(1,2,-1,3,1),(5,2,-1,7,1),(2,-1,2,-4,-2)],\\
\mathbf{T} &= [(2,-3,2,-2,2),(2,5,-5,-2,-4),(3,6,-11,4,-4)],\\
\mathbf{U} &= [(1,2,2,6,6),(5,5,-3,11,1),(1,2,2,4,8)],\\
\mathbf{V} &= [(1,1,3,3,4),(1,3,-5,-7,-1),(1,-1,5,7,-3)],\\
\mathbf{W} &= [(3,-1,2,3,-2),(5,-4,-1,4,1),(4,1,-11,-7,11)].
\end{aligned}$$

Využijte techniku Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu s následným normováním vektorů.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$ je pro každé dva polynomy $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ definováno reálné číslo

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Ověřte, že zobrazení $\mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ přiřazující každé dvojici polynomů $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ takto definované reálné číslo $\langle f, g\rangle$ je skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$. Dále ověřte, že množina polynomů

$$\mathbf{K} = \{f \in \mathbb{R}_4[x] : f(-1) = 0 = f(1)\}$$

tvoří vektorový podprostor ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$, a určete jeho dimenzi. Najděte v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ s výše definovaným skalárním součinem nějakou ortonormální bázi tohoto vektorového podprostoru $\mathbf{K}$.

3. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ jsou dány vektorové podprostory $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ zadané jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= [(1,2,-1,-3,3),(1,-2,3,1,-1)],\\ \mathbf{Q} &= [(1,3,-1,-2,2),(1,-3,5,4,-4),(1,5,3,-10,10)].\end{aligned}$$

Najděte ortogonální doplňky těchto vektorových podprostorů $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$.

4. Nechť kvadratická forma $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^5$ vyjádření tvaru

$$L(\mathbf{x}) = (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_5)^2+(x_1+x_5)^2.$$

Bez použití diagonalizace kvadratické formy L ověřte, že kvadratická forma L je pozitivně definitní (tedy nikoliv pouze pozitivně semidefinitní). Nechť dále $\ell : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ určující kvadratickou formu L v tom smyslu, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ platí

$$L(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Vyjádřete tuto symetrickou bilineární formu ℓ opět ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^5$. Pak ovšem ℓ je skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$. Nechť $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbb{R}^5$ jsou vektorové podprostory prostoru $\mathbb{R}^5$ zadané jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= [(1,1,1,-1,-1),(1,-1,-1,1,1)],\\ \mathbf{Z} &= [(1,1,-1,-1,-1),(1,1,-1,-1,1),(1,-1,-1,-1,1)].\end{aligned}$$

V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ s výše definovaným skalárním součinem ℓ najděte ortogonální doplňky obou uvedených vektorových podprostorů $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$.

Domácí úkoly ke cvičení č. 7

1. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ najděte ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4, 5)$ do vektorových podprostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ zadaných jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\mathbf{V} = [(3, 3, 2, 1, 3), (5, 1, 4, -1, 1)],$$
$$\mathbf{W} = [(1, -3, 4, -2, 2), (1, 5, -8, -2, 4), (1, -9, 16, 4, -4)].$$

(Doporučení: Ve druhém případě najděte nejprve ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do ortogonálního doplňku $\mathbf{W}^\perp$ zadaného vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$.)

2. V obou následujících případech jsou v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ dány přímka p a rovina ρ. Přímka p je v obou případech zadána prostřednictvím parametrického popisu, zatímco rovina ρ je v prvním případě zadána rovněž prostřednictvím parametrického popisu, kdežto v druhém případě je zadána implicitně pomocí níže uvedené soustavy lineárních rovnic:

(a) $p: \ X = [3, 5, 7, 4] + r{\cdot}(4, -2, -2, 1),$
$\rho: \ X = [4, 3, 9, 10] + s{\cdot}(4, 1, -1, -1) + t{\cdot}(4, -1, 1, -1).$

(b) $p: \ X = [1, 6, 2, 4] + r{\cdot}(2, -1, 2, -2),$
$$\rho: \ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 11, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 57. \end{aligned}$$

V obou případech ověřte, že přímka p a rovina ρ jsou navzájem mimoběžné, a tedy jsou úplně mimoběžné. Dále v obou případech zjistěte vzdálenost přímky p od roviny ρ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_4$. Nakonec najděte příčku těchto navzájem úplně mimoběžných podprostorů, tedy přímky p a roviny ρ, na níž se realizuje vzdálenost přímky p od roviny ρ. To znamená, najděte ty jednoznačně určené body $C \in p$ a $D \in \rho$ s vlastností, že délka úsečky CD je rovna vzdálenosti přímky p od roviny ρ.

3. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ jsou prostřednictvím parametrického popisu zadány dvě roviny

$$\begin{aligned} \rho &: \quad X = [2, 0, -1, 3] + s\cdot(1, -2, 0, 1) + t\cdot(2, -3, -2, 3), \\ \eta &: \quad X = [2, -1, -2, 9] + u\cdot(3, 6, 6, -10) + v\cdot(4, 5, 4, -8). \end{aligned}$$

Ověřte, že roviny ρ a η jsou navzájem částečně mimoběžné. Zjistěte vzdálenost roviny ρ od roviny η v prostoru $\mathbf{E}_4$. (Doporučení: Vypočtěte nejprve přímo ortogonální projekci vektoru spojujícího rovinu ρ s rovinou η do ortogonálního doplňku součtu zaměření $(\mathcal{Z}(\rho) + \mathcal{Z}(\eta))^{\perp}$ rovin ρ a η.)

4. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ jsou implicitně pomocí soustav lineárních rovnic zadány dvě roviny

$$\begin{aligned} \rho :\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 37, \\ \eta :\quad & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40, \\ & x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1. \end{aligned}$$

Ověřte, že roviny ρ a η jsou navzájem rovnoběžné, ale nikoliv totožné. Zjistěte vzdálenost roviny ρ od roviny η v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_4$.