Domácí úkoly ke cvičení č. 2

1. Nechť $\mathcal{M}$ je nejmenší afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ obsahující body

$$\begin{aligned} A &= [1, 2, -1, 0, -2], \quad & B &= [2, -1, 0, -2, 1], \\ C &= [-1, 0, -2, 1, 2], \quad & D &= [-2, 3, -3, 3, -1]. \end{aligned}$$

Jinak řečeno, nechť $\mathcal{M}$ je afinní obal množiny zadaných bodů $\{A, B, C, D\}$ v prostoru $\mathbb{R}^5$. Najděte nejprve parametrický popis tohoto afinního podprostoru $\mathcal{M}$. Odtud odvoďte implicitní popis afinního podprostoru $\mathcal{M}$ pomocí soustavy lineárních rovnic, tj. najděte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejíž množinou všech řešení je právě afinní podprostor $\mathcal{M}$. Navíc zjistěte dimenzi tohoto afinního podprostoru $\mathcal{M}$.

2. Nechť $\mathcal{P}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný implicitně jako množina všech řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 9, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 12. \end{aligned}$$

Nechť $\mathcal{Q}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný implicitně jako množina všech řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 11, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 7. \end{aligned}$$

Zjistěte vzájemnou polohu afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v $\mathbb{R}^5$. Zejména určete dimenze podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ a zjistěte, zda jejich průnik $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ je či není prázdný. Nechť $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ značí nejmenší afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ obsahující sjednocení uvedených podprostorů $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Najděte implicitní popis tohoto afinního podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ pomocí lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$. Určete dimenzi tohoto afinního podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$. (Doporučený postup k nalezení implicitního popisu afinního podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$: Najděte nejprve parametrické popisy obou podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$, odtud zjistěte parametrický popis podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ a z tohoto popisu odvoďte implicitní popis podprostoru $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$.)

3. Nechť $\mathcal{P}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný tím, že obsahuje bod $S = [4, -4, 3, 1, -1]$ a že jeho zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ je generováno vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (1, -1, 1, 0, -1),\\ \mathbf{u}_2 &= (1, -5, -1, 4, 1),\\ \mathbf{u}_3 &= (2, -3, 0, 3, -2).\end{aligned}$$

Nechť $\mathcal{Q}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaný tím, že obsahuje bod $T = [5, -2, 4, 1, -2]$ a že jeho zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ je generováno vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1, 3, 3, -3, -1),\\ \mathbf{v}_2 &= (1, -5, -1, 5, 3),\\ \mathbf{v}_3 &= (3, -1, 1, 3, -3).\end{aligned}$$

Určete dimenze afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ a zjistěte, zda jejich průnik $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ je neprázdný. Je-li tomu tak, pak najděte parametrický popis afinního podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Najděte tedy alespoň jeden bod ležící v průniku $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, zjistěte, zda zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$ tohoto afinního podprostoru je nenulové, a je-li nenulové, najděte nějakou jeho bázi. Pomocí těchto údajů pak užitím parametrů vyjádřete všechny body afinního podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Určete dimenzi afinního podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ a stanovte vzájemnou polohu afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v $\mathbb{R}^5$. (Doporučení k výpočtu průniku $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$: Najděte nejprve implicitní popisy obou podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ pomocí soustav lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$. Spojením těchto dvou soustav obdržíte soustavu, která, má-li řešení, je implicitním popisem podprostoru $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.)

4. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť je prostřednictvím parametrického popisu zadána přímka

$$h: \; X = [1, 2, -1, 2] + u\cdot(1, 1, -1, 2),$$

a dále nechť je implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic zadána rovina

$$\begin{aligned} \vartheta: \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku ℓ procházející bodem

$$C = [4, -1, 2, 2]$$

a protínající současně přímku h i rovinu ϑ. Najděte také průsečíky této přímky ℓ s přímkou h i s rovinou ϑ.

5. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť jsou prostřednictvím parametrického popisu zadány přímky

$$\begin{aligned} p: \; X &= [1, 2, 1, 2] + s\cdot(1, -1, -1, 1), \\ q: \; X &= [2, 1, 2, 1] + t\cdot(1, 1, -1, -1), \end{aligned}$$

a dále nechť je implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic zadána rovina

$$\begin{aligned} \eta: \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku r rovnoběžnou s přímkou p a protínající současně přímku q i rovinu η. Najděte také průsečíky této přímky r s přímkou q i s rovinou η.

Domácí úkoly ke cvičení č. 3

1. V každém z následujících případů určete vzájemnou polohu afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v prostoru $\mathbb{R}^5$. Každý z podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ je pokaždé zadán buďto parametrickým popisem, anebo implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$. V každém z uvedených případů dále určete dimenzi spojení $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$, a nejsou-li tyto podprostory navzájem disjunktní, určete též dimenzi jejich průniku $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

(a)
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}:\ X &= [0,-7,0,-4,9] \\
&\qquad +s\cdot(1,-1,1,1,3) + t\cdot(1,-2,-1,-2,2), \\
\mathcal{Q}:\ X &= [0,1,0,0,9] \\
&\qquad +u\cdot(1,1,-3,-3,1) + v\cdot(1,2,-1,0,2).
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}:\ X &= [0,-1,0,4,1] \\
&\qquad +s\cdot(1,2,4,0,-2) + t\cdot(4,-1,-4,0,7), \\
\mathcal{Q}:\ X &= [2,-3,1,4,0] \\
&\qquad +u\cdot(2,3,-1,0,4) + v\cdot(1,-5,2,0,-3).
\end{aligned}$$

(c)
$$\mathcal{P}:\ X = [2,-6,5,-8,1] + r\cdot(2,-8,3,-5,1),$$
$$\mathcal{Q}:\ \begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}-4x_4+2x_5} &= 6, \\
x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 2, \\
5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 4.
\end{aligned}$$

(d)
$$\mathcal{P}:\ X = [1,1,1,1,1] + r\cdot(1,2,-1,3,1),$$
$$\mathcal{Q}:\ \begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 &= 8, \\
x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 &= 8, \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 6.
\end{aligned}$$

(e)
$$\mathcal{P}:\ \begin{aligned}
x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \phantom{{}-3x_5} &= -5, \\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= 7, \\
x_3 + x_4 - x_5 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}: \quad x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad\quad &= 4, \\ 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5. \end{aligned}$$

2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť jsou implicitně pomocí soustav lineárních rovnic zadány roviny

$$\begin{aligned} \rho: \quad x_1 - 6x_2 - 9x_3 + x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta: \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 24. \end{aligned}$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku p procházející bodem

$$G = [2, -1, 6, 5],$$

rovnoběžnou s rovinou ρ a protínající rovinu η. Najděte také průsečík této přímky p s rovinou η.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť jsou prostřednictvím parametrického popisu zadány přímky

$$\begin{aligned} q: \ X &= [3, 2, 3, 8] + u\cdot(1, 2, -1, -2), \\ r: \ X &= [1, 1, 9, 5] + v\cdot(2, 1, -2, -1), \end{aligned}$$

a dále nechť je implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic zadána rovina

$$\begin{aligned} \vartheta: \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 9. \end{aligned}$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku h rovnoběžnou s rovinou ϑ a protínající obě přímky q i r. Najděte také průsečíky této přímky h s oběma přímkami q i r.