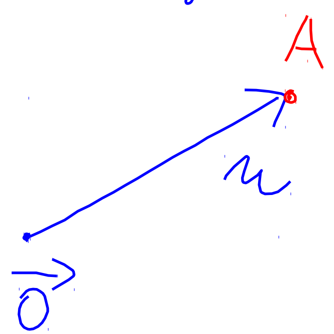
AFINNÍ GEOMETRIE

U je vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Prvky prostoru U nazýváme vektory ... značení $u \in U$

V afinní geometrii je budeme nazývat i body $A \in U$



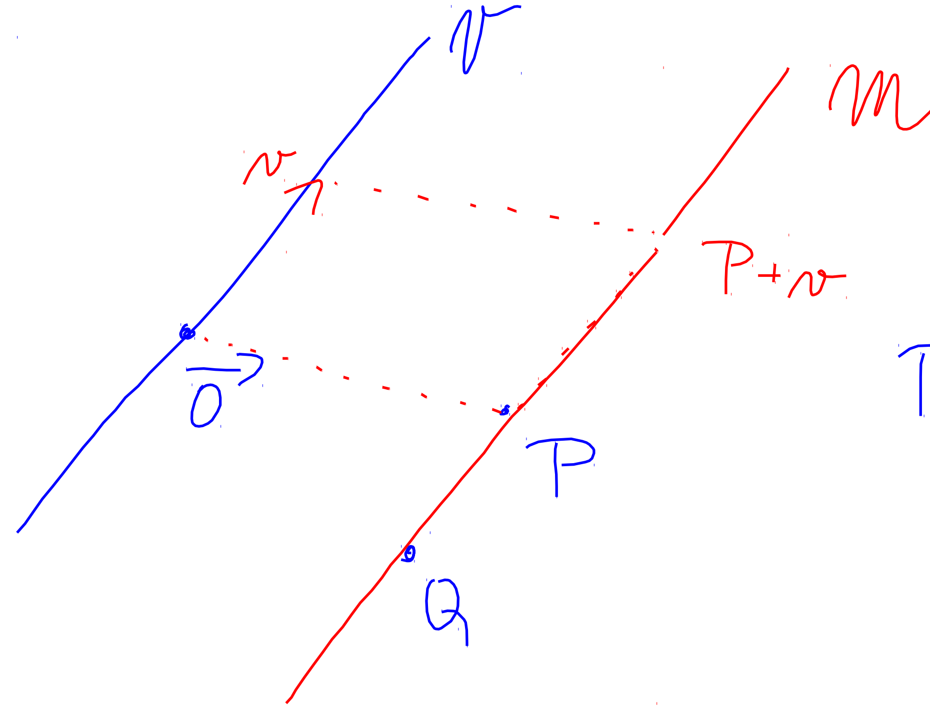
Afinní podprostor M ve vekt. prostoru U je NEPRÁZDNÁ množina bodů, která je tvaru

$$M = P + V = \{P + v \in U \,;\, v \in V\}$$

kde P je bod v U a $V \subseteq U$ je vekt. podprostor.

Příklady

① $U = \mathbb{R}^2$



$$P + V = Q + V$$

② A matice $k \times n$ $b \in \mathbb{R}^k$ $h(A|b) = h(A)$.

Pak má soustava $Ax = b$ řešení.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b\}$$ je afinní podprostor

Víme, že existuje nějaké řešení $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b\} = \{x_0 + y \in \mathbb{R}^n ; Ay = 0\}$$
$$= x_0 + \{y \in \mathbb{R}^n ; Ay = 0\}$$

vekt. podprostor

3 $\mathcal{U} = \mathbb{R}_{10}[x]$

$$\mathcal{M} = \{ p \in \mathbb{R}_{10}[x] \,;\, p(1) = 2018 \}$$

je afinní podprostor

Konstantní polynom $p(x) = 2018 \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = 2018 + \underbrace{\{ q \in \mathbb{R}_{10}[x] \,;\, q(1) = 0 \}}_{\text{vekt. podprostor}}$$

V definici $\mathcal{M} = P + V$ není bod P určen jednoznačně.
Naproti tomu vekt. podprostor V jednoznačně určen JE.

Důkaz: Nechť $\mathcal{M} = P_1 + V_1 = P_2 + V_2$

Chceme dokázat, že $V_1 = V_2$. K tomu stačí dokázat $V_1 \subseteq V_2$ a $V_2 \subseteq V_1$.

$$P_1 + \vec{o} = P_2 + u_2 \qquad u_2 \in V_2$$

$v_1 \in V_1 \qquad P_1 + v_1 = P_2 + v_2$ kde $v_2 \in V_2$

$$P_2 + u_2 + v_1 = P_2 + v_2$$
$$u_2 + v_1 = v_2$$
$$v_1 = \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{v_2} - \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{u_2} \in V_2$$

Dokázali jsme $V_1 \subseteq V_2$.
Obrácení analogicky.

<u>Definice</u> Je-li afinní podprostor M tvaru $P + V$, pak podprostor V nazýváme zaměřením afinního podprostoru

$$Z(M) = V. \qquad \dim M = \dim Z(M)$$

<u>Poznámka</u>: Všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou

1) body (dim = 0)
2) přímky (dim = 1)
3) celé $\mathbb{R}^2$ (dim = 2)

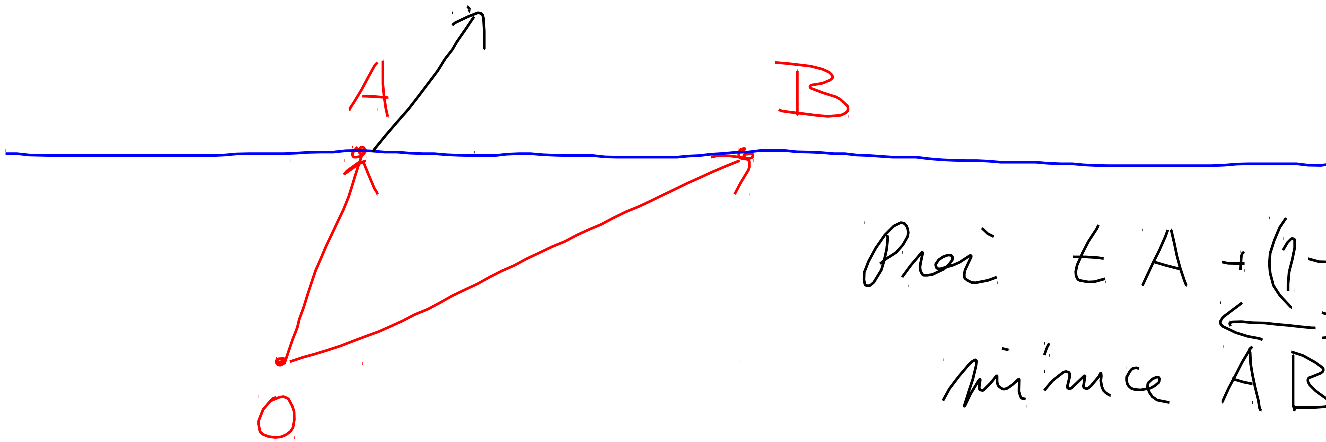
Všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou

1) body
2) přímky
3) roviny
4) $\mathbb{R}^3$

Lineární kombinace vektorů $a\vec{u} + b\vec{v}$, a, b libovolné

Afinní kombinace bodů $tA + (1-t)B$

$tA + sB$, kde $t + s = 1$



Pro $tA + (1-t)B$ leží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$

$$tA + (1-t)B - A = (t-1)A + (1-t)B = (1-t)(B-A)$$

Afinní kombinace bodů $A_0, A_1, \dots A_k$ je

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i \quad \text{kde} \quad \sum_{i=0}^{k} t_i = 1$$

<u>Tvrzení</u>: Je-li M afinní podprostor a $A_0, \dots, A_k \in M$, pak v M leží i jejich afinní kombinace.

<u>Dk</u>: $M = P + V$, $V \subseteq U$ vekt. podprostor

$A_i = P + v_i$, $v_i \in V$

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i = \sum t_i (P + v_i) = \underbrace{\underbrace{\left(\sum t_i\right)}_{1} P + \underset{\in V}{\sum t_i v_i}}_{P + \sum t_i v_i}$$

Věta: Jestliže $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ je neprázdná a s každými dvěma různými body $A, B \in \mathcal{M}$ leží v $\mathcal{M}$ i přímka, kterou určují, je $\mathcal{M}$ afinní podprostor.

Důkaz: Zvolme $P \in \mathcal{M}$. Definujme

$$V = \{ A - P \in \mathcal{U} \,;\, A \in \mathcal{M} \}$$

Potom evidentně

$$\mathcal{M} = P + V$$

Stačí dokázat, že V je vekt. podprostor.

Nechť $A - P,\ B - P \in V$

$$(A-P) + (B-P) = (A+B-P) - P = \Big(\underbrace{2\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right)}_{\mathcal{M}} + (-1)P}_{\in \mathcal{M}}\Big) - P$$

Tento vektor leží ve V.

Náročk $A \in M$

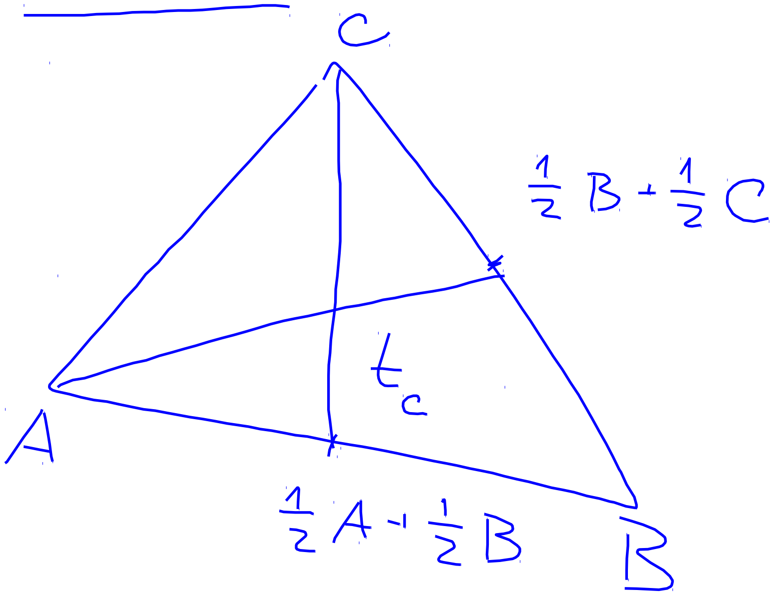
$A - P \in V$

$$a(A-P) = \underbrace{\big(aA + (1-a)P\big)}_{\in M} - P \in V.$$

Druhá možná definice afinního podprostoru

Je to neprázdná podmnožina ve vekt. prostoru, kde s každými dvěma body leží i přímka, kterou určují.

Příklad: Těžnice v $\triangle ABC$ se protínají v jednom bodě



Body na těžnici t_a jsou

$$(1-p)A + p\left(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C\right)$$

Body na těžnici t_c jsou

$$s\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) + (1-s)C$$

Průsečík splňuje $(1-p)A + \frac{p}{2}B + \frac{p}{2}C = \frac{s}{2}A + \frac{s}{2}B + (1-s)C$

Odtud plyne

$$1-p = \frac{s}{2} \qquad \frac{p}{2} = 1-s \Rightarrow \quad p = s$$

$$\frac{p}{2} = \frac{s}{2} \qquad\qquad 1-p = \frac{p}{2}$$

$$p = \frac{2}{3} = s$$

Průsečíkem těžnic je bod … těžiště

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Tento bod leží i na těžnici t_B.

Dvojí popis afinních podprostorů

① Parametrický: souvisí s definicí

$$\mathcal{M} = P + V, \text{ kde } V \subseteq U \text{ je podprostor}$$

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je báze podprostoru V. Pak každý bod $M \in \mathcal{M}$ lze psát ve tvaru

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

Toto je parametrický popis.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ $\quad P + t\vec{u} + s\vec{v}$

(2) Implicitní – pomocí soustavy lin. rovnic

Je to popis afinních podprostorů v $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$

$$M = \{ x \in \mathbb{K}^n \, ; \ Ax = b \}$$

kde A je matice $k \times n$ a $b \in \mathbb{K}^k$, $h(A|b) = h(A)$

Příklad rovina v $\mathbb{R}^3$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

matice $A = (a_1, a_2, a_3) \neq 0 \qquad h(A) = 1$

Přímka v $\mathbb{R}^3$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$h(\tilde{A}) = h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow h(\tilde{A}) = h(A|b)$$

$$Z(M) = \{x \in \mathbb{R}^3,\ Ax = 0\}$$

$$\dim \{x \in \mathbb{R}^3;\ Ax = 0\} = \underbrace{\text{počet neznámých}}_{3} - h(A)$$

Rovina: $3 - h(A) = 3 - 1 = 2$

Přímka: $3 - h(\tilde{A}) = 3 - 2 = 1$

Přechod od implicitního zápisu k parametrickému

Stačí vyřešit soustavu $Ax = b$ pomocí parametrů. Tím dostaneme parametrický zápis.

$Ax = b$ má řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 3t - s \\ x_2 &= 3 + t - 8s \\ x_3 &= 1 + 3t \\ x_4 &= 2 + t + 2s \end{aligned}$$

$$M = (2+3t-s,\ 3+t-8s,\ 1+3t,\ 2+t+2s)$$

$$= \underbrace{(2,3,1,2)}_{P} + t(3,1,3,1) + s(-1,-8,0,2)$$

$$P \quad + \quad t\ v_1 \quad + \quad s\ v_2$$

$$\mathcal{M} = P + [v_1, v_2]$$

Přechod od parametrického popisu k soustavě rovnic

$$X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

V souřadnicích

$$x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots + c_{1k} t_k$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = p_n + c_{n1} t_1 + c_{n2} t_2 + \dots + c_{nk} t_k \qquad v_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

Maticově

$$X = Ct + p \qquad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

$$Ex = x = Ct + p$$

$$(E \mid C \mid p) \quad \underset{\text{úpravy}}{\overset{\text{provádíme řádkové}}{\sim}} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1 \\ \hline A & 0 & b \end{array}\right)$$

kde C_1 je ve schodovitém tvaru bez nulového řádku.

(To je cílem úprav – C upravujeme na schodovitý tvar a teprve pak rozdělíme na $\dfrac{C_1}{0}$)

Pořád platí

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b \end{pmatrix}$$

Toto lze zapsat jako dvě rovnice

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$

$$A x = b$$

<u>Důkaz:</u> Je-li $X \in M$, pak x je řešení $Ax = b$.

Je-li x řešení $Ax = b$, pak dokážeme, že

$$x = Ct + p$$

pro nějaké $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$.

Soustava $$A_1 x = C_1 t + b_1$$

pro pevné x a neznámé t má řešení, neboť C_1 je ve schod. tvaru a nemá nulový řádek. Označme nějaké řešení t.

Pak platí
$$\left.\begin{aligned} Ax &= b \\ A_1 x &= C_1 t + b_1 \end{aligned}\right\} \iff Ex = x = Ct + p$$

Průnik afinních podprostorů

Je-li neprázdný, je opět afinní podprostor.

Při praktickém zadání nastane 1 z těchto 3 případů:

(1) Oba podprostory jsou popsány soustavou rovnic

$$M : \quad Ax = b$$
$$N : \quad Cy = d$$

$$M \cap N : \quad \begin{aligned} Az &= b \\ Cz &= d \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

(2) M popsán parametricky $\quad M : P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

N popsán soustavou $\quad N : Ax = b$

Vezmeme
$$x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \dots$$
$$x_2 = p_2 + c_{21} t_1 + \dots$$
$$\dots\dots$$

a tedy dosadíme do soustavy $Ax = b$.

Dostaneme soustavu pro neznámé $t_1, \dots, t_k$ (těch je obvykle málo). Tuto soustavu vyřešíme pomocí nějakých nových parametrů $s_1, s_2, \dots, s_l$

$$t_1 = 1 + 2s_1 - 3s_2$$
$$t_2 = 2 + s_1 + s_2$$
$$t_3 = 3 \qquad - 2s_2$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \left\{ P + (1 + 2s_1 - 3s_2)v_1 + (2 + s_1 + s_2)v_2 + (3 - 2s_2)v_3 \right\}$$

$$= \left\{ (P + v_1 + 2v_2 + 3v_3) + s_1(2v_1 + v_2) + s_2(-3v_1 + v_2 - 2v_3) \right\}$$

(3) Dva podprostory zadány parametricky

$$\mathcal{M} \doteq P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$$

$$\mathcal{N} \quad Q + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} - \{ X = P + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = Q + s_1 v_1 + s_2 v_2 \}$$

Řešíme soustavu

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 - s_1 v_1 - s_2 v_2 = Q - P$$

Stačí použít s_1 a s_2

$$s_1 = 2 + a$$

$$s_2 = 3 + 4a$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ Q + (2+a) v_1 + (3+4a) v_2 \}$$

$$= \{ (Q + 2v_1 + 3v_2) + a(v_1 + 4v_2) \}$$

U vekt. podprostorů jsme definovali součet.

U afinních podprostorů definujeme spojení afinních podprostorů

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$$

jako nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$\mathcal{M} : P + V$

$\mathcal{N} : Q + W$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} : P + \underbrace{[Q-P] + V + W}_{\text{zaměření}}$$