PSEUDOINVERZNÍ MATICE

A matice $k \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Singulární rozklad

$$A = \underbrace{P}_{k\times k}\,\underbrace{S}_{k\times n}\,\underbrace{Q^*}_{n\times n}$$

kde P, Q jsou ortogonální nebo unitární

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \; s_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

s_i jsou druhé odmocniny z kladných vl. čísel A^*A, $s_i > 0$

②

Pseudoinverzní matice

$$\underbrace{A^{(-1)}}_{n\times k} = \underset{n\times n}{Q} \underset{n\times k}{\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{k\times k}{P^*}$$

Vlastnosti: (1) Je-li A tvaru $n\times n$ a invertibilní, je $A^{(-1)} = A^{-1}$.

V tomto případě je $S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & s_n \end{pmatrix}$, a tedy $S^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & \\ & s_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & s_n^{-1} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = (PSQ^*)^{-1} = (Q^*)^{-1} S^{-1} P^{-1} = Q S^{-1} P^* = A^{(-1)}$$

(2) $$\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A$$

$$\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = \left(Q\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^*\right)^{(-1)} = P\begin{pmatrix}(D^{-1})^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^* = P\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^* = A$$

(3) $A^{(-1)}A$ a $AA^{(-1)}$ jsou matice symetrické, resp. hermitovské

$$\left(A^{(-1)}A\right)^* = \left(Q\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underbrace{P^*\,P}_{E}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^*\right)^* = \left(\underset{n\times n}{Q}\ \underset{n\times n}{\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}\ \underset{n\times n}{Q^*}\right)^*$$

$$= Q\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^* = A^{(-1)}A$$

(4) $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^{(-1)}(y) = A^{(-1)}y$

$\varphi^{(-1)} \circ \varphi(x) = A^{(-1)} A x$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^n \longrightarrow (\ker \varphi)^{\perp}$

$\varphi \circ \varphi^{(-1)}(y) = A A^{(-1)} y$ je kolmá projekce $\mathbb{K}^r \longrightarrow \operatorname{im} \varphi$

Musíme do důkazu věty o sing. rozkladu

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{\varphi(x) = Ax} \mathbb{K}^r$$

v $\mathbb{K}^n$ máme bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ ortonormální

v $\mathbb{K}^r$ máme bázi $\beta = \Big(\underbrace{\tfrac{Au_1}{\sqrt{\lambda_1}}}_{v_1}, \underbrace{\tfrac{Au_2}{\sqrt{\lambda_2}}}_{v_2}, \dots \underbrace{\tfrac{Au_r}{\sqrt{\lambda_r}}}_{v_r}, v_{r+1}, \dots v_k\Big)$ ortonormální

$(\varphi)_{\beta,\alpha} = S$ $\qquad \underbrace{S^{(-1)} \cdot S}_{\text{matice } \varphi^{(-1)} \circ \varphi \text{ v bázi } \alpha} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ kolmá projekce na $[u_1, u_2, \dots u_r]$

Tím, že $\ker \varphi = [u_{r+1}, \dots u_n]$, tedy $[u_1, u_2, \dots, u_r] = (\ker \varphi)^{\perp}$

Obdobně

$$S\,S^{(-1)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matice } k \times k$$

Toto je matice $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$ v bázi B. Proto jde o kolmou projekci na prostor $[v_1, v_2, \dots, v_k] = \operatorname{im} \varphi$ neboť $v_i = \dfrac{A u_i}{\sqrt{\lambda_i}}$.

(5) $A A^{(-1)} A = A$

$$A A^{(-1)} A = P S \underbrace{Q^* Q}_{E} S^{(-1)} P^* P S Q^* = P \underbrace{S S^{(-1)}} \underbrace{S} Q^*$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= P S Q^* = A$$

Analogicky $A^{(-1)} A A^{(-1)} = A^{(-1)}$

6 $A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)} A^*$

$$(A^*A)^{(-1)} A^* = (Q S^* \underbrace{P^* P}_{E} S Q^*)^{(-1)} A^* =$$

$$= \left(Q \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \times r} \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{r \times n} Q^*\right)^{(-1)} A^* = \left(Q \left(\begin{array}{ccc|c} s_1^2 & & & \\ & s_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & s_n^2 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) Q^*\right)^{(-1)} A^*$$

$$= Q \left(\begin{array}{ccc|c} s_1^{-2} & & & \\ & s_2^{-2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & s_n^{-2} \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \underbrace{Q^* Q}_{E} \underbrace{S^*}_{\left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots \; s_1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)} P^* = Q \left(\begin{array}{ccc|c} s_1^{-1} & & & \\ & s_2^{-1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & s_n^{-1} \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) P^* = A^{(-1)}$$

Důsledek vlastnosti 6 zapíšu v následujícím:

Jestliže $A^* A$ má inverzi, pak $A^{(-1)} = (A^* A)^{-1} A^*$

Aplikace pseudoinverzní matice

- Aproximace řešení soustav lin. rovnic

Soustava $Ax = b$ A je typu $k \times n$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^k$

má řešení, právě když $h(A) = h(A|b)$.

Jinak řečeno: $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $b \in \operatorname{im} \varphi$

$\varphi(x) = Ax$

V případě, že tato podmínka není splněna, chceme najít $x \in \mathbb{K}^n$

tak, aby Ax bylo co nejblíže k b.

$\|Ax - b\|$ bylo minimální

Věta Pro $x \in \mathbb{K}^n$ funkce

$$\|Ax - b\|$$

nabývá svého minima v bodě $x = A^{(-1)} b$.

Důkaz: Víme, že $A A^{(-1)}$ je matice kolmé projekce $\mathbb{K}^k$ na $\operatorname{im}\varphi$ $\left(\varphi(x) = Ax\right)$. Pak

$$\min_{x \in \mathbb{K}^n} \|Ax - b\| = \min_{y \in \operatorname{im}\varphi} \|y - b\| = \|P_{\operatorname{im}\varphi}\, b - b\| =$$

kolmá projekce na $\operatorname{im}\varphi$ dává nejbližší vektor v $\operatorname{im}\varphi$ k vektoru b

$$= \|A \underbrace{A^{(-1)} b} - b\|$$

Jestliže vezmeme $z \in \ker\varphi$, tj. $Az = 0$. Pak $A(A^{(-1)}b + z) = AA^{(-1)}b$

Body v $\mathbb{K}^n$, kde

$$\|Ax - b\|$$

nabývá svého minima tvoří afinní podprostor

$$A^{(-1)}b + \{z \in \mathbb{K}^n,\ Az = 0\}$$

Lineární regrese Měříme veličiny x a y a předpokládáme, že jsou lineárně závislé, tj. $y = \beta x$.

Naměříme hodnoty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$. Měla by platit

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta x_1 \\ y_2 &= \beta x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta x_n \end{aligned}$$

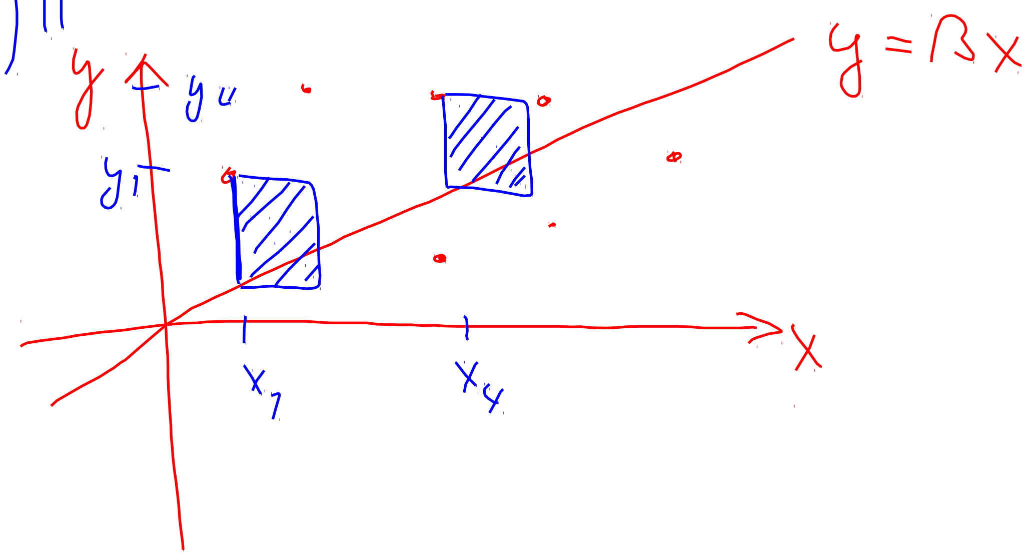
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\beta}_{\text{neznámá}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{b}$$

Hledáme $\beta \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \beta - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|$$

byla co nejmenší.

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \beta - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2 = (x_1\beta - y_1)^2 + (x_2\beta - y_2)^2 + \dots + (x_n\beta - y_n)^2$$



Z předchozí teorie víme, že

$$\beta = A^{(-1)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \underbrace{\left\{ z \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\{0\}}$$

x_i bereme navzájem různá

Bude tedy β dáno jednoznačně

$$\beta = A^{(-1)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(-1)}$$ vzorec 6 $$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}^{(-1)} \begin{pmatrix} x_1, & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_n \end{pmatrix} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \dots + x_n^2},\ \frac{x_2}{x_1^2 + \dots + x_n^2},\ \dots \right)$$

$$\beta = A^{(-1)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$y = \beta x$ má požadované vlastnosti

Obdobně bychom řešili úlohu: Předpokládáme, že mezi veličinami x a y je vztah

$$y = \alpha + \beta x$$

Naměříme hodnoty $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ na $x_i \neq x_j,\ i \neq j$.

Chceme najít $\underline{\alpha}$ a $\underline{\beta}$ tak, aby součet čtverců

$$(y_1 - \alpha - \beta x_1)^2 + (y_2 - \alpha - \beta x_2)^2 + \dots + (y_n - \alpha - \beta x_n)^2$$

byl minimální. To vede k řešení soustavy

13

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\beta = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}1 & x_1\\1 & x_2\\\vdots & \vdots\\1 & x_n\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}}_{\text{neznámá}} = \underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}}_{b}$$

Tedy $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ najdeme jako $\begin{pmatrix}1 & x_1\\1 & x_2\\\vdots & \vdots\\1 & x_n\end{pmatrix}^{(-1)}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

Zase A^*A je matice 2×2, která je invertibilní.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = (A^*A)^{-1}A^*\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

Viz tabule z přednášky čísla 11 z roku 2017.

POLÁRNÍ ROZKLAD MATICE

Motivace: Vezmeme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = (a+ib)\,z \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a+ib = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad r \geq 0.$$

Matice 1×1 s prvkem $\cos\alpha + i\sin\alpha$ je unitární.

Matice 1×1 s prvkem $r \in \mathbb{R}$ je samoadjungovaná, pro $r>0$ pozitivně definitní.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)^* = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 1$$

$$r^* = r$$

Věta o polárním rozkladu

Nechť A je čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak je lze rozložit na způsob

$$A = R \cdot U$$

kde R je samoadjungovaná ($R = R^*$) a pozitivně semidefinitní ($\langle Rx, x\rangle \geq 0$) a U je unitární nebo ortogonální.

Navíc platí, že $R^2 = AA^*$ (píšeme $R = \sqrt{AA^*}$)

Je-li A invertibilní, je tento rozklad jednoznačný.

Důkaz pomocí singulárního rozkladu matice A:

$$A = PSQ^* = \underbrace{PSP^*}_{R}\,\underbrace{PQ^*}_{U}$$

$$R^* = P^{**}S^*P^* = PSP^* = R$$

$$UU^* = PQ^*QP^* = E$$

(16)

$$\langle Rx, x\rangle = \langle PSP^* x, x\rangle = \langle SP^* x, P^* x\rangle = \langle Sy, y\rangle =$$
$$= s_1 y_1^2 + \dots + s_n y_n^2 \geq 0$$

$$AA^* = (RU)(RU)^* = RUU^*R^* = RER = R^2$$

Je-li A invertibilní, je $S = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix}$, $s_i > 0$,

tedy existuje S^{-1}.

Nechť $A = R_1 U_1$ a $A = R_2 U_2$. $AA^* = R_1^2$, $AA^* = R_2^2$

Vlastní čísla AA^* jsou $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2 > 0$ a vl. vektory jsou $u_1, u_2, \dots, u_n$. Navíc $R_1^2 = R_2^2$

$$R_1^2 u_i = s_i^2 u_i \qquad R_2^2 u_i = s_i^2 u_i$$

Odtud lze ukázat, že $R_1 u_i = s_i u_i$ a $R_2 u_i = s_i u_i$, tedy $R_1 = R_2$.

Z $R_1 = R_2$ plyne $U_1 = U_2$.

QR rozklad matice

Matice A tvaru $n \times n$. Předpokládejme, že je invertibilní, tj. její sloupce jsou lin. nezávislé

$Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ jsou lin. nezávislé. Pro tyto vektory provedeme Grammův-Schmidtův ortog. proces

Najdeme vektory $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ které jsou ortogonální a platí

$$Ae_1 = u_1 = R_{11} u_1$$

$$Ae_2 = R_{12} u_1 + R_{22} u_2$$

$$Ae_3 = R_{13} u_1 + R_{23} u_2 + R_{33} u_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(Ae_1\ Ae_2\ Ae_3 \dots Ae_n) = (u_1\ u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Ae_1\ Ae_2\ Ae_3 \dots Ae_n) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}\ \frac{u_2}{\|u_2\|} \dots \frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\begin{pmatrix} \|u_1\|R_{11} & \|u_2\|R_{12} & \dots \\ 0 & \|u_2\|R_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$A = QR$$

Q: unitární nebo ortogonální

R: horní trojúhelníková

Aplikace – řešení soustav rovnic

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^*b$$

R: horní trojúhelníková

Nemusíme provádět Gaussovu eliminaci