Jordanův kanonický tvar

Existují lin. operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla jsou kořeny $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2$

Vlastní číslo 2 alg. násobnosti 2

Geom. násobnost je ale 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Má řešení $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$

To znamená, že neexistuje báze taková, že by v ní

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pak by totiž vektory v_1, v_2 báze α byly vlastní a lin. nezávislé.

<u>Jinak:</u> Matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ není podobná žádné diagonální matici.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$$

pak by λ_1, λ_2 musela být vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

a existovala by báze α taková, že

$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, což není možné.

③

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

Cílem je najít pro obecný operátor φ bázi α tak, aby $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ byla co nejjednodušší. Hledaný tvar se nazývá Jordanův kanonický tvar.

<u>Jordanova buňka</u> je matice tvaru $k \times k$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanův kanonický tvar je matice $n \times n$, kde na diagonále jsou obecně různé Jordanovy buňky.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{k_i}(\lambda_i) \end{pmatrix} \qquad k_1 + k_2 + \dots + k_i = n$$

S Jordanovými buňkami souvisí pojem řetězce operátoru φ pro vlastní číslo λ.

Jde o k-tici nenulových vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ takových, že

$$(\varphi - \lambda\, id)u_1 = 0,\quad (\varphi - \lambda\, id)u_2 = u_1,\quad (\varphi - \lambda\, id)u_3 = u_2,\ \dots,\ (\varphi - \lambda\, id)u_k = u_{k-1}$$

Schématicky

$$0 \xleftarrow{\varphi - \lambda id} u_1 \xleftarrow{\varphi - \lambda id} u_2 \xleftarrow{\varphi - \lambda id} u_3 \leftarrow \cdots \leftarrow u_{k-1} \xleftarrow{\varphi - \lambda id} u_k$$

u_1 je vlastní vektor k λ

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$V = [u_1, u_2, \dots u_k]$$

$$\varphi(u_1) = \lambda u_1$$

$$\varphi(u_2) = u_1 + \lambda u_2 \qquad \varphi(u_2) - \lambda u_2 = u_1$$

$$\varphi(u_3) = u_2 + \lambda u_3 \qquad \varphi(u_3) - \lambda u_3 = u_2$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_k) = u_{k-1} + \lambda u_k$$

Tedy $\varphi(V) \subseteq V$. Lze ukázat (indukcí podle k), že $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lin. nezávislé. Tvoří tedy bázi B podprostoru V. Matice φ/V v bázi B je

$$(\varphi/V)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

Jord. kan. tvar budeme hledat tak, že najdeme vhodné řetězce.

Věta o JKT

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel je n. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jord. kanonickém tvaru. Tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Poznámka: Báze α není určena jednoznačně.
Báze α je vždy dána posloupností řetězců. Jednotlivé řetězce určují Jord. buňky.

Věta o JKT – maticová verze

Nechť A je matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Nechť její char. polynom má n kořenů včetně násobnosti. Pak je matice A podobná matici J v Jord. kan. tvaru, tj.

$$J = P^{-1} A P.$$

Přitom matice J je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

<u>Důkaz</u> maticové verze z předchozí verze.

Nechť je dána matice A. Ta určuje operátor $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax$. Podle předchozí verze existuje báze α taková, že

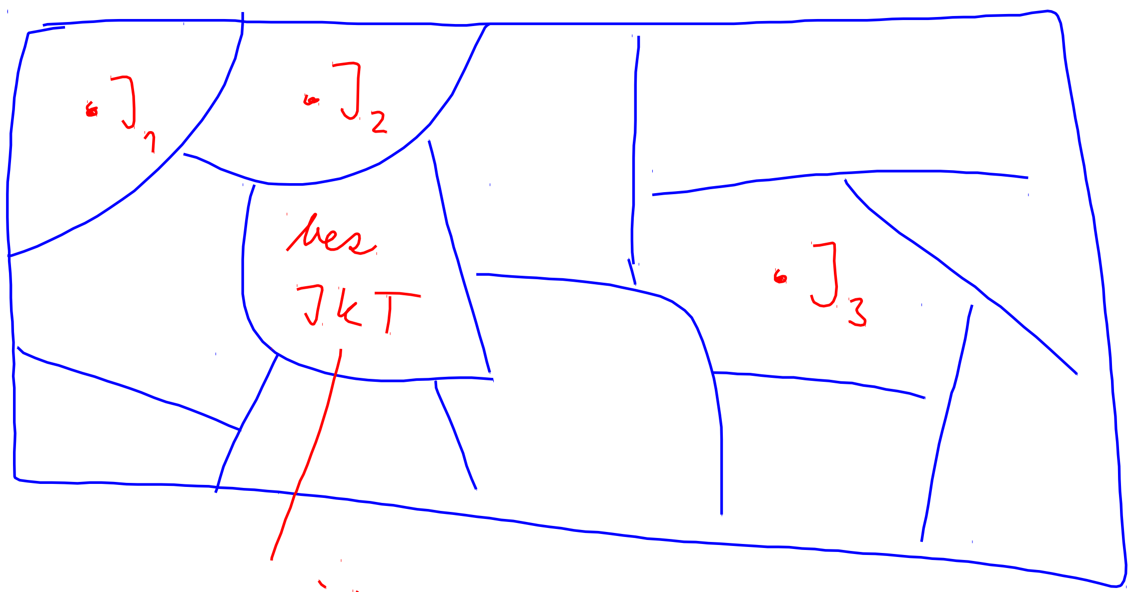
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

Platí

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1} A P.$$

Tedy matice A je podobná matici J v JKT.

Matice $n \times n$ rozdělené do tříd ekvivalence, kde ekvivalencí je podobnost matic



v případě, že char. polynom nemá n kořenů v celém nadtělese

Kriterium podobnosti dvou matic

Dvě matice A a B s char. polynomem, který má n kořenů, jsou podobné, právě když mají stejný (až na pořadí bloků)

Jordanův kanonický tvar

Poznámka: Jsme-li nad komplexními čísly je podmínka o vlastních číslech případně kořenech char. polynomu vždy splněna. Každý polynom stupně n má v $\mathbb{C}$ n kořenů včetně násobnosti.

Příklad 1a $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

char. polynom je $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$

2 alg. i geom. násobnost je $\underline{1}$

1 alg. i geom. násobnost je 2

Vlastní vektory k $\lambda_1 = 2$ $v_1 = (1,-2,3)^T$

$\lambda_2 = 1$ $v_2 = (3,6,-8)^T$

$v_3 = (1,-1,1)^T$

11

Baze $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ ..... v_1 je 1. řetězec velikosti 1

v_2 je 2. řetězec velikosti 1

v_3 je 3. řetězec velikosti 1

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}}_{= P}$$

Zkouška $PJ = AP$.

Příklad 1b

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

char. polynom je $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$

$\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = (1,0,0)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. násobnost je 2, ale geometrická 1

vl. vektor $(1,-1,0) = v_2$.

Pravidlo 1 Na diagonále JKT stojí vlastní čísla, každé tolikrát, kolik je jejich algebraická násobnost.

Proto hledáme k vl. číslu 1 řetězec délky 2.

Hledáme v_3 tak, aby

řetězec bude (v_2, v_3)

$$(A - 1E)\, v_3 = v_2 \qquad 0 \xleftarrow{A-E} v_2 \xleftarrow{A-E} v_3$$

Jedno řešení je

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2} \qquad x_1 = 0$

Báze $\alpha = (\underbrace{v_1}_{}, \underbrace{v_2, v_3}_{})$

řetězce

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= P^{-1} \; A \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_{\text{" } P}$$

Pravidlo 2 Počet buněk pro vlastní číslo λ v JKT je roven geom. násobnosti vl. čísla λ.

Příklad 2 $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$

$\lambda_1 = 2$ je vl. číslo alg. násobnosti 3 a geom. násobnosti 1

V tomto okamžiku už máme pro JKT jedinou možnost – jedna buňka

$$J = J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ale neznáme bázi α takovou, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$. Ani neznáme matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$. K tomu musíme najít řetízec délky 3.

Vl. vektor k $\lambda_1 = 2$ je $u_1 = (2,1,2)^T$.

$(A-2E)u_2 = u_1 \qquad u_2 = (5,2,1)^T$

$(A-2E)u_3 = u_2 \qquad u_3 = (3,1,0)^T$

$$0 \xleftarrow{A-2E} u_1 \xleftarrow{A-2E} u_2 \xleftarrow{A-2E} u_3$$

Matice v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$J = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 3 $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

Vl. číslo $\lambda_1 = 2$ má alg. násobnost 3 a geom. násobnost 2 s vlastními vektory

$$u = (2, -1, 0)^T$$
$$v = (0, 0, 1)^T$$

J má 2 bloky s vl. číslem 2 rozměrů 2×2 a 1×1.

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Opět ale neznáme tvar ani matici P. Musíme najít jeden řetězec délky 2.

Tento řetězec začíná vl. vektorem $au + bv$. Řešíme soustavu

$$(A - 2E)\, w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení pouze pro $2a+b=0$. Např. pro $a=1,\ b=-2$. Vyřešíme v tomto případě

$$(A-2E)\,w = u-2v \qquad w = (-1,1,1)^T$$

Vektory

$$0 \xleftarrow{A-2E} u-2v \xleftarrow{A-2E} w \quad \text{tvoří řetězec délky 2.}$$

Vezmeme $\alpha = (\underline{u-2v},\ w,\ \underline{u})$ Zobecněné vektory jsou lin. nezávislé.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = J = P^{-1}AP \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice 4×4

U matic 3×3 se značení vl. čísel a jejich alg. a geom. násobnosti může vést na JKT. U matic 4×4 to v případě λ_1 alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2 už určit nelze. Máme 2 možnosti

$$J_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & \lambda_1 \end{array}\right) \quad \text{nebo} \quad J_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \hline & & \lambda_1 & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

Příklad 4

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$

$\lambda_1 = -1$ má alg. násobnost 4 a geom. nás. má 2

Vlastní vektory jsou $u = (1,0,3,0)^T$, $v = (0,0,1,-2)^T$

Hledáme aspoň jeden řetězec délky 2.

$$(A+E)\,w = au + bv$$

V tomto případě má soustava řešení pro každé $\underline{a}$ a $\underline{b}$. Proveďte si sami výpočet. Proto můžeme řešit 2 soustavy

$$(A+E)\,u_1 = u$$

$$(A+E)\,v_1 = v$$

Jejich řešením dostaneme 2 řetězce délky 2. Ty tvoří bázi α

$$\alpha = (u, u_1, v, v_1) \qquad u_1 = (0,-1,0,3)^T, \quad v_1 = (0,-2,0,5)^T$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Zk: $PJ = AP$.

Příklad 5

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$

vl. čísla $\lambda_1 = 1$ má alg. nás. 4 a geom. nás. 2

Vlastní vektory jsou $u = (0,1,0,1)^T$ a $v = (-2,0,3,0)^T$

Řešíme soustavu $(A-E)w = au + bv$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě když $a + 6b = 0$

Zvolíme $b = 1$, $a = -6$ $\qquad -6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$

To je nakonec řetězce délky 3.

$$(A-E)\,w = -6u + v$$

$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + \alpha u + \beta v$ všechna řešení

Hledáme 3. vektor řetězce $\qquad (A-E)\,z = w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2\beta \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + \alpha \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3\beta \\ 9 & 9 & 6 & -9 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + \alpha + 6\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + \alpha + 6\beta \end{array}\right)$$

Soustava má řešení pro

$$-1 + \alpha + 6\beta = 0$$

$\beta = 0$, $\alpha = \underline{1}$.

$$w = \left(\frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + u = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right) \qquad z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Řetězec délky 3 je

$$0 \xleftarrow{A-E} -6u+v \xleftarrow{A-E} w \xleftarrow{A-E} z$$

Řetězec délky 1

$$0 \xleftarrow{A-E} u$$

Báze $\alpha = (-6u+v, w, z, u)$ dává $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$

$$J = P^{-1}AP \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ -6 & 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$