# Vlastní čísla a vlastní vektory

$\varphi : U \to U$ lin. operátor

$u \neq \vec{o}$ je vlastní vektor s vl. číslem $\lambda$, jestliže

$$\varphi(u) = \lambda u .$$

$\lambda$ je kořen char. polynomu

$$\det\left( (\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) = 0$$

Spočítáme-li $\lambda$, pak vlastní vektor je nenulové řešení homogenní soustavy

$$(\varphi - \lambda \, id)(u) = 0$$

$$\left( (\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) (u)_\alpha = 0$$

kde $\alpha$ je nějaká báze v $U$

## Algebraická násobnost kořene polynomu

$\lambda_0$ je kořenem polynomu $p(\lambda)$ algebraické násobnosti $k$, jestliže

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda), \text{ kde } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_0$ operátoru $\varphi$ je rovna algebraické násobnosti $\lambda_0$ jako kořene charakt. polynomu.

Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_0$ operátoru $\varphi$, je

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_0 id)$$

Je-li $u$ vlastní vektor k vl. číslu $\lambda_0$ je $\varphi(u) = \lambda_0 u$, tj

$$(\varphi - \lambda_0 id) u = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id) \Longrightarrow \dim \ker(\varphi - \lambda_0 id) \geq 1.$

$\ker(\varphi - \lambda_0 id)$ jsou všechny vlastní vektory ke vl. číslu $\lambda_0$ a navíc ještě nulový vektor. $\ker(\varphi - \lambda_0 id) \subseteq U$ se nazývá vlastní podprostor.

<u>Věta</u> algebraická násobnost vl. čísla $\geq$ geom. násobnost vl. čísla

Příklady 1 $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

char. polynom je
$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_0 = 2$ je vl. čísla alg. násobnosti 3

$$\ker(A-2E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$$

geometrická násobnost vl. čísla 2 je 3

4

## Příklad 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

Vl. číslo $\lambda_0 = 2$ má alg. násobnost 3.

$\operatorname{Ker}(A-2E) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ae_2 + be_3\} = [e_2, e_3]$

$\dim \operatorname{Ker}(A-2E) = 2$, geom. násobnost $\lambda_0 = 2 <$ alg. násobnost $= 3$.

## Příklad 3

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

char. polynom je $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$

$\lambda_0 = 2$ má alg. násobnost 3

$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [e_3] \quad \dim \operatorname{Ker} = 1 \quad \lambda_0 = 2$ má geom. násobnost $1 <$

$<$ alg. násobnost $= 3$.

V druhém a třetím příkladě neexistuje v $\mathbb{R}^3$ báze $\alpha$ taková, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je diag. matice.
Jestliže $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je diagonální, pak musí být báze tvořena vlastními vektory, což vím v příkladu 2 a 3 není možné (geom. dimenze $< 3$).

<u>Důkaz věty</u>: Nechť $\lambda_0$ je vlastní číslo operátoru $\varphi : U \to U$ geometrické násobnosti $k$. Ukážeme, že alg. násobnost $\lambda_0$ je $\geq k$.
Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ je báze $\ker(\varphi - \lambda_0 \, id)$. Tuto bázi doplníme na bázi celého prostoru $U$, tuto označíme $\alpha$.
Spočítáme char. polynom operátoru $\varphi$ pomocí báze $\alpha$:

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc|ccc} & & & \downarrow k & & & \\ \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \times & * & * \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \times & * & \times \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_0 & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \end{array} - \lambda E \right) =$$

$$= \det \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0-\lambda & & 0 & & & \\ & \lambda_0-\lambda & & & * & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_0-\lambda & & & \\ \hline & & & *-\lambda_0 & & * \\ & 0 & & * & \ddots & \\ & & & & & *-\lambda_0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n-k \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{aaaaaaaaaa}}_{k} \; \underbrace{\hphantom{aaaaaaaaaaaa}}_{n-k} \end{array} = \det \begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} *-\lambda_0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \; q(\lambda)$$

Odtud plyne, že $\lambda_0$ je kořenem char. polynomu násobnosti

ASPOŇ $k$.

# UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Pracujme v prostorech se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Operátor $\varphi : U \to U$ ve vekt. prostoru $U$ nad $\mathbb{C}$ se nazývá **unitární**, jestliže platí

$$\forall u, v \in U \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

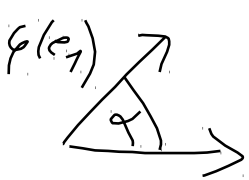
Operátor $\varphi : U \to U$ ve vekt. prostoru $U$ nad $\mathbb{R}$ se nazývá **ortogonální**, jestliže platí rovněž

$$\forall u, v \in U \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

**Příklad** Otočení v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel $\alpha$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Toto zobrazení je geometricky otočení o úhel $\alpha$.




$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Pro matici $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ platí

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T \cdot (Ay) = x^T (A^T A) y$$

$$= x^T \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} y = x^T \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix}}_{E} y$$

$$= x^T \cdot y = \langle x, y \rangle$$

<u>Zobecnění předchozího příkladu</u>

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je $\varphi(x) = Ax$, kde $A$ splňuje $A^T A = E$.

Pak stejně jako v předchozím příkladě platí

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T (Ay) = x^T A^T A y = x^T E y = x^T y = \langle x, y \rangle.$$

Takovéto matice se nazývají <u>ortogonální</u>

## Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů

1. $\forall u \in U \quad \|\varphi(u)\| = \|u\|$ — tato je nejsilnější podmínka, ale také postačující

2. $\forall u, v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je $\measuredangle(u,v) = \measuredangle(\varphi(u), \varphi(v))$

3. $\varphi$ zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi. (speciální $\varphi$ je prosté)

Dk: 1. $\|\varphi(u)\|^2 = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2.$

2. $$\cos \measuredangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|\varphi(u)\| \|\varphi(v)\|} \overset{1}{=} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \cos \measuredangle(u,v)$$

3. $u_1, u_2, \dots u_n$ je ortonormální báze. Pak

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{matrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j, \end{matrix}$$

tedy $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$ je ortonormální báze.

(10)

## Jak vypadají všechny unitární operátory z $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

Každý operátor $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je tvaru $\varphi(x) = Ax$, pro nějakou čtvercovou matici $A$ nad $\mathbb{C}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní

$$\forall x,y \in \mathbb{C}^n \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(Ax)^T \overline{(Ay)} = x^T \overline{y}$$

$$\forall x,y \in \mathbb{C}^n \quad \underline{x^T A^T \overline{A}}\, \overline{y} = x^T \underline{E}\, \overline{y}$$

$$A^T \cdot \overline{A} = E$$

$$\overline{A}^T \overline{\overline{A}} = \overline{E}$$

$$\overline{A}^T A = E$$

$\overline{\phantom{x}}$ znamená komplexní sdružování

$\overline{a+ib} = a - ib$

$\overline{\phantom{x}}$ aplikujeme

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

Všechny unitární operátory $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jsou tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde $\overline{A}^T A = E \Leftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^T$

Takové matice nazýváme unitární

Jak vypadají všechny ortogonální operátory $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

Analogicky jako v předchozím ukážeme, že jsou tvaru

$$\varphi(x) = Ax, \text{ kde } \quad A^T A = E$$

Tyto matice se nazývají ortogonální $\left( A^T A = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^T \right)$

Jak na matici poznáme, že je ortogonální

$$A^T A = E$$

$$\begin{pmatrix} s_1(A)^T \\ s_2(A)^T \\ \vdots \\ s_n(A)^T \end{pmatrix} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) & \dots & s_n(A) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1(A)^T \cdot s_1(A) = \langle s_1(A), s_1(A) \rangle = 1 = \|s_1(A)\|^2$$

$$i \neq j \quad s_i(A)^T \cdot s_j(A) = \langle s_i(A), s_j(A) \rangle = 0$$

Sloupce matice $A$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.

Stejně tak řádky.

<u>Věta</u> Nechť $\varphi : U \to U$ je ortogonální (unitární) operátor a $\alpha$ je ortonormální báze. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je ortogonální (unitární) matice.

(Pro báze, které nejsou ortonormální to neplatí.)

<u>Dk</u>: V ortonormální bázi $\alpha$ platí $\qquad U \xrightarrow{(\ )_\alpha} \mathbb{R}^n$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle_U = \langle (\varphi(u))_\alpha, (\varphi(v))_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle (\varphi)_{\alpha,\alpha}(u)_\alpha, (\varphi)_{\alpha,\alpha}(v)_\alpha \rangle$$

$$= \underline{(u)_\alpha^T (\varphi)_{\alpha,\alpha}^T (\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha}$$

$$\|$$

$$\langle u, v \rangle_U = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n} = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha = \underline{(u)_\alpha^T E (v)_\alpha}$$

Tedy $(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} = E$, proto je $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ ortogonální.

# Determinant ortogonálních a unitárních matic

**Lemma**: determinant ortogonální matice je 1 nebo -1.
Absolutní hodnota determinantu unitární matice je 1.
(determinant unitární matice je obecně komplexní číslo).

## Důkaz nad $\mathbb{C}$:

Platí:

$$\bar{A}^T \cdot A = E$$

$$\det(\bar{A}^T \cdot A) = \det E$$

$$\det \bar{A}^T \cdot \det A = 1$$

$$\det \bar{A} \cdot \det A = 1$$

$$\overline{(\det A)} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

$$|\det A| = 1.$$

Platí

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

# Vlastní čísla a vlastní vektory unitárních a ortog. operátorů

**VĚTA**: (1) Vlastní čísla takových operátorů mají abs. hodnotu 1.

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

**Dk**: (1) Nechť $u$ je vl. vektor s vl. číslem $\lambda$. Pak

$$0 \neq \langle u,u\rangle = \langle \varphi(u),\varphi(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle u,u\rangle = |\lambda|^2\langle u,u\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0}(1-|\lambda|^2) = 0 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

(2) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu(v)$ a $\lambda \neq \mu$.

$$\langle u,v\rangle = \langle \varphi(u),\varphi(v)\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \lambda\bar{\mu}\langle u,v\rangle$$

Všimněme, že $|\mu| = 1 \Rightarrow \mu\cdot\bar{\mu} = 1 \Rightarrow \mu^{-1} = \bar{\mu}$. Dostaneme

$$\langle u,v\rangle = \lambda\mu^{-1}\langle u,v\rangle$$

$$\langle u,v\rangle(\underbrace{1-\lambda\mu^{-1}}_{\neq 1}) = 0$$

protože $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0$, $u$ a $v$ jsou na sebe kolmé.

# HLAVNÍ VĚTA O UNITÁRNÍCH OPERÁTORECH

Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární. Pak v $U$ existuje ortonormální báze $\alpha$ tvořená vlastními vektory. Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_i$ jsou vlastní čísla ($|\lambda_i| = 1$). Pro ortogonální operátory takové tvrzení neplatí.

Důkaz indukcí podle $\dim U$: Pro $\dim U = 1$ je $\varphi(u) = \lambda u$ pro každé $u \in U$, tedy $\frac{u}{\|u\|}$ je hledaná báze, $u \neq \vec{o}$.

Nechť věta platí pro prostory komplexní dimenze $n-1$. Nechť $\dim_{\mathbb{C}} U = n$ a $\varphi : U \to U$ je unitární. Jeho char. polynom má kořen v $\mathbb{C}$. Označme ho $\lambda_1$ a příslušný vlastní vektor s normou 1 jako $u_1$.

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1 \qquad \|u_1\| = 1.$$

Dokážeme, že podprostor $[u_1]^\perp \subseteq U$ je invariantní.

$v \in [u_1]^\perp$, to znamená $\langle v, u_1\rangle = 0$.

Chceme ukázat, že $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$ tj. $\langle \varphi(v), u_1\rangle = 0$.

$$\langle \varphi(v), \varphi(u_1)\rangle = \langle v, u_1\rangle = 0$$

$$\langle \varphi(v), \lambda_1 u_1\rangle = \overline{\lambda_1}\langle \varphi(v), u_1\rangle$$

Z rovnosti $\overline{\lambda_1}\langle \varphi(v), u_1\rangle = 0$ a toho, že $\overline{\lambda_1} \neq 0$, $(|\lambda_1| = 1)$

plyne $\langle \varphi(v), u_1\rangle = 0$

Vezmeme-li operátor $\tilde{\varphi} = \varphi / [u_1]^\perp : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$

tak tento je unitární a přitom $\dim_{\mathbb{C}} [u_1]^\perp = n-1$.

Můžeme použít indukční předpoklad, tedy $\tilde{\varphi}$ má v $[u_1]^\perp$

ortonormální bázi $u_2, u_3, \dots, u_n$ tvořenou vlastními vektory.

Tedy $u_1, u_2, \dots u_n$ je ortonormální báze $U$ tvořená vlastními vektory, což jsme chtěli dokázat.

## Ortogonální operátory v dimenzi 2, tj. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

kde $a^2 + b^2 = 1$.

nebo

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ +b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

① $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\det A = a^2 + b^2 = 1$, lze volit $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.

$$\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

je otočení o úhel $\alpha$.

Pro $\alpha \neq k\pi$ nemá $\varphi$ reálná vlastní čísla.

Char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 > 0$$

2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ +b & -a \end{pmatrix}$ $\quad \det A = -a^2 - b^2 = -1$

$a^2 + b^2 = 1$

V tomto případě je char. polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+a)(\lambda-a) - b^2 = \lambda^2 - (a^2+b^2)$$
$$= \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

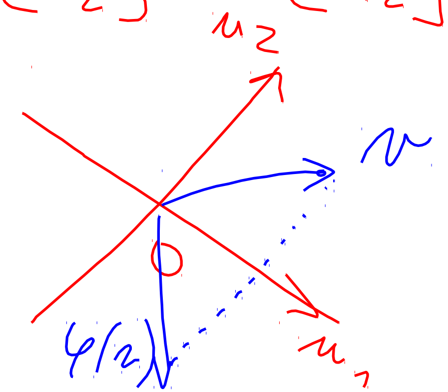
$\varphi$ má vlastní čísla $1$ a $-1$

s vlastními vektory $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$. Ty jsou na sebe kolmé

(vlastní vektory k různým vl. číslům)

$\varphi/[u_1] : [u_1] \longrightarrow [u_1]$ je identita: $\varphi(u_1) = u_1$

$\varphi/[u_2] : [u_2] \longrightarrow [u_2]$ je $-$identita: $\varphi(u_2) = (-1)u_2$




$\varphi$ je symetrie podle přímky určené vektorem $u_1$.