

Domácí úkoly ke cvičení č. 5

1. Necht' kvadratická forma F na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 má ve standardních souřadnicích vektorového prostoru \mathbb{R}^4 vyjádření tvaru

$$F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_1x_4 \\ + 8x_2x_3 + 24x_2x_4 + 10x_3x_4.$$

Najděte symetrickou bilineární formu f na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 takovou, aby pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ platilo

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Vyjádřete tuto symetrickou bilineární formu f opět ve standardních souřadnicích prostoru \mathbb{R}^4 . Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice této bilineární formy f upravte bilineární formu f a spolu s ní i výchozí kvadratickou formu F na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty 1, -1 , případně 0, a to v tomto uvedeném pořadí. Najděte alespoň jednu bázi prostoru \mathbb{R}^4 takovou, aby v souřadnicích vzhledem k této bázi měly zadaná kvadratická forma F i k ní přiřazená symetrická bilineární forma f nalezený diagonální tvar. O kvadratické formě F pak rozhodněte, zda je to forma pozitivně či negativně definitní, případně semidefinitní, anebo zda jde o kvadratickou formu, která je indefinitní.

2. Necht' kvadratické formy F, G, H na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 mají ve standardních souřadnicích prostoru \mathbb{R}^4 vyjádření tvarů

$$F(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4, \\ G(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4, \\ H(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_4^2.$$

Metodou doplňování na čtverce upravte každou z těchto kvadratických forem na diagonální tvar, v němž budou vystupovat pouze koeficienty $1, -1$, případně 0 , a to v tomto uvedeném pořadí. Pro každou z kvadratických forem F, G, H najděte bázi prostoru \mathbb{R}^4 takovou, aby v souřadnicích vzhledem k této bázi měla dotyčná kvadratická forma nalezený diagonální tvar. O každé z kvadratických forem F, G, H rozhodněte, zda je tato forma pozitivně či negativně definitní, případně semidefinitní, anebo zda jde o kvadratickou formu, která je indefinitní.