Lineární programování – jaro 2012 – 3. termín

1. **(15 bodů)** V našem dole se těží n různě kvalitních rud, které dodáváme zpracovateli. Vytěžení jednotkového množství i-té rudy vyžaduje využití a_i procent měsíční výrobní kapacity dolu. Z jednotkového množství i-té rudy zpracovatel získá b_i tun kovu, přičemž zpracovatel nemá zájem za měsíc vyprodukovat více než b tun kovu. Provoz dolu stojí měsíčně c korun, přičemž vytěžení jednotkového množství i-té rudy nás navíc stojí c_i korun. Zpracovatel nám za jednotkové množství i-té rudy zaplatí d_i korun. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na čísla a_i, b_i, b, c, c_i a d_i (pro $i \in \{1, \dots, n\}$), abychom byli schopni v našem dole provozovat neztrátovou těžbu.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Cz + a \le 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, c \cdot (x+y) \mid (x_1^2, \dots, x_n^2) \le b,\ by \ge \alpha,\ By \le Ax \,\},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a y jsou vektory proměnných stejné dimenze, $b \ge 0$ a c jsou konstantní vektory, A a B matice a α číslo. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Formulujte větu o rozkladu polyedrů a definujte v ní použité pojmy. Dokažte libovolnou ze dvou implikací této věty. Zadejte systémem nerovnic množinu $Q + C \subseteq \mathbb{R}^2$, kde

$$\begin{aligned} Q &= \{\, (x,y) \mid x + y \le 1,\ y - x \le 1,\ y \ge 0 \,\} \text{ a} \\ C &= \{\, (x,y) \mid x + y = 0 \,\}. \end{aligned}$$

4. **(30 bodů) (Zadání čtěte velmi pozorně!)** Řešte primární simplexovou metodou úlohu minimalizovat

$$3x + y + z$$

při omezeních $y \ge 0$, $z \ge 0$ a

$$\begin{aligned} 2x - y + z &\le 5, \\ x - 2y + z &\ge 2. \end{aligned}$$

Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x + y + 2z \le 4$$

a využijte závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení úlohy primární simplexovou metodou. Konečně, po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x - 2y + 2z \le 3$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.