

Lineární programování – jaro 2016 – 1. termín

- (15 bodů)** V továrně na výrobu známek jsou všechny stroje s_i , pro $i = 1, \dots, n$, chlazeny vodou přitékající do továrny přes stroj s_1 a odtékající z továrny přes stroj s_n , přičemž množství přitékající a odtékající vody není omezeno a ze stroje s_i do stroje s_j vede jednosměrné potrubí o maximálním možném průtoku b_{ij} l/s, pro všechna $i, j = 1, \dots, n$. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby bylo možno zajistit průtok vody továrnou takový, že strojem s_i protéká alespoň a_i l/s, pro $i = 1, \dots, n$. (Pokud některé potrubí neexistuje, zvolili jsme příslušné b_{ij} rovné nule; například $b_{ii} = 0$ pro všechna i .)
- (20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z , matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF \leq a, z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid (y+1)A = p, x^T B \geq q, yb \leq dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \dots, 1)$)

- (25 bodů)** Formulujte větu o rozkladu polyedrů na polytopy a kužely a definujte všechny ve větě použité pojmy. Dokažte, že pro každý polyedr je příslušný kužel určen jednoznačně. Dejte příklad polyedru dimenze tři takového, že není sám kuželem a že mezi polytopy, které lze použít k jeho rozkladu, neexistuje nejmenší vzhledem k inkluzi.
- (30 bodů)** Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{3, 1, 2\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování maximalizovat

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$2x_1 + x_2 + 3 = x_3 + x_4 + 2x_5,$$

$$x_1 + 2x_4 + 5 = x_3 + 2x_5,$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 13$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x_4 + 1 \geq x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.