Lineární programování – jaro 2016 – 3. termín

1. (15 bodů) Ministr financí již přislíbil každému z n ministerstev ve státním rozpočtu na příští rok jistou částku, a to konkrétně i-tému ministerstvu a_i korun, pro $i = 1, \dots, n$. Na zasedání vlády bylo následně rozhodnuto o zvýšení schodku rozpočtu o α korun, přičemž i-té ministerstvo z této částky požaduje b_i korun, pro $i = 1, \dots, n$. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na hodnoty a_i, b_i, α a β, aby bylo možno rozdělit celou částku mezi ministerstva při splnění následujících podmínek:

(a) Každému ministerstvu bude přidána alespoň polovina částky, kterou požaduje.

(b) Žádnému ministerstvu se přislíbená částka nezvýší o více než o deset procent.

(c) Pro libovolná dvě ministerstva nepřekročí rozdíl mezi jim přidanými částkami β korun.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = a,\ z \geq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid yA = p,\ Bx \geq q,\ yb \leq dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \dots, 1)$)

3. (25 bodů) Formulujte větu o rozkladu polyedrů na polytopy a kužely a definujte všechny ve větě použité pojmy. Dokažte, že každý polyedr jde opravdu takto rozložit. Charakterizujte všechny polyedry, pro které je tento rozklad jednoznačný, a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru dimenze tři, který lze popsaným způsobem jednoznačně rozložit na polytop dimenze jedna a kužel dimenze dva.

4. (30 bodů) Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad 2x + y - 10z - t$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $8 \geq z \geq 0$, $t \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 2t &\leq -4, \\ 2x - 2y + 3z + 4t &\geq -15, \\ x \phantom{{}- 2y} - 2z - t &\geq -6. \end{aligned}$$

Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením podmínky $8 \geq z$ podmínkou $2 \geq z$, duální metodou.